Devoir surveillé n° 4
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) On procède par méthode du pivot :

$$
\begin{aligned}
(P \mid I_3) &\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{10}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

donc P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Par calcul direct :

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Notons $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} D^2 - 6D = \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^2-6x & 0 & 0 \\ 0 & y^2-6y & 0 \\ 0 & 0 & z^2-6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2-6x &=& 1 \\ y^2-6y &=& 0 \\ z^2-6z &=& -5 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3 \pm \sqrt{10} \\ y &=& 0 \text{ ou } 6 \\ z &=& 1 \text{ ou } 5 \end{array} \right. , \end{aligned}$$

donc $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \left\{3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}\right\},\ b \in \{0,6\},\ c \in \{1,5\} \right\}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} M^2 - 6M = A \quad &\Leftrightarrow \quad M^2 - 6M = P\Delta P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad P^{-1}M^2P - 6P^{-1}MP = \Delta \\ &\Leftrightarrow \quad (P^{-1}MP)^2 - 6P^{-1}MP = \Delta, \end{aligned}$$

donc M est solution de (E') si et seulement si $D = P^{-1}MP$ est solution de (E'). Une solution de (E') est ainsi :

$$M = P \begin{pmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 44+15\sqrt{10} & 42+15\sqrt{10} & 4 \\ -14+-5\sqrt{10} & -12-5\sqrt{10} & -4 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. On a $z'' = (y''+y)'' = y^{(4)} + y''$. Par équivalence :

$$\begin{aligned} (\text{y est solution de } (E)) \quad &\Leftrightarrow \quad y^{(4)} = y \\ &\Leftrightarrow \quad z'' = y + y'' = z \\ &\Leftrightarrow \quad (\text{z est solution de } (E')). \end{aligned}$$

2. Comme $z' = y^{(3)} + y'$, les conditions initiales associées à (E') sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z(0) &=& y''(0) + y(0) = 2 + 0 = 2 \\ z'(0) &=& y^{(3)}(0) + y'(0) = 3 + 1 = 4 \end{array} \right. .$$

3. L'équation (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène. Son équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$, de solutions $r_{1,2} = \pm 1$, donc (E') a pour solutions les $z : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$.
Les conditions initiales imposent : $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 2 \\ \lambda - \mu &=& 4 \end{array} \right.$, c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda &=& 6 \\ 2\lambda &=& -2 \end{array} \right.$, c'est-à-dire $(\lambda, \mu) = (3, -1)$.
Donc (E') a pour solution :

$$z : t \mapsto 3e^t - e^{-t}.$$

4. L'équation (E) revient donc à : $y'' + y = 3e^t - e^{-t}$.
L'équation homogène associée $y_h'' + y_h = 0$ a pour solutions les $y_h : t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$.
De plus, comme 1 et -1 ne sont pas solutions de l'équation caractéristique $P(r) = r^2 + 1 = 0$, et d'après le principe de superposition :

(E) a pour solution particulière $y_p : t \mapsto \dfrac{3}{P(1)} e^t + \dfrac{-1}{P(-1)} e^{-t} = \dfrac{3}{2} e^t - \dfrac{1}{2} e^{-t}$.

Donc (E) a pour solutions les $y : t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \dfrac{3}{2} e^t - \dfrac{1}{2} e^{-t}$.

Les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ s'écrivent : $\begin{cases} \lambda + 1 &= 0 \\ \mu + 2 &= 1 \end{cases}$, c'est-à-dire $(\lambda, \mu) = (-1, -1)$. Donc (E) a pour solution :

$$y : t \mapsto -\cos(t) - \sin(t) + \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

Exercice 3.

1. (a) Comme f est strictement monotone, d'après le théorème de la bijection monotone, f est injective sur $[0, a]$. De plus, comme f est dérivable, f est continue ; et f est monotone donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $f([0, a]) = [f(0), f(a)]$ si f est croissante, $[f(a), f(0)]$ si f est décroissante.
   Donc f est bijective de $[0, a]$ dans $[f(0), f(a)]$ si f est croissante, $[f(a), f(0)]$ si f est décroissante.

   (b) On pose $u = g(t)$. Alors $\displaystyle\int_{t=f(0)}^{t=f(x)} = \int_{u=g(f(0))}^{u=g(f(x))} = \int_{u=0}^{u=x}$. De plus, $t = f(u)$, donc $dt = f'(u)du$. Donc :

$$\int_{f(0)}^{f(x)} g(t)dt = \int_0^x uf'(u)du.$$

   (c) Par intégration par parties :

$$\int_0^x uf'(u)du = [uf(u)]_0^x - \int_0^x f(u)du = xf(x) - \int_0^x f(u)du,$$

   ce qui est la formule recherchée.

2. On pose $f = \arccos$. Cette fonction est usuellement dérivable strictement décroissante sur $[0, a]$ pour tout $a < 1$, donc, d'après la formule de Laisant :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, a], \quad \int_0^x \arccos(t)dt &= x \arccos(x) - \int_{\arccos(0)}^{\arccos(x)} \cos(t)dt \\ &= x \arccos(x) - [\sin(t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} \\ &= x \arccos(x) - \sin(\arccos(x)) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2} + 1, \end{aligned}$$

   donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les primitives de $\arccos$ sont les $x \mapsto x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2} + c, \ c \in \mathbb{R}$.

3. (a) La fonction f est usuellement dérivable sur $[0, 1]$, avec : $\forall x \in [0, 1], \ f'(x) = e^x + xe^x > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc injective sur $[0, 1]$ d'après le théorème de la bijection monotone.
   Comme f est dérivable, f est continue ; et f est croissante donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, e]$.
   Donc f est bijective de $[0, 1]$ dans $[0, e]$.

   (b) D'après la formule de Laisant :

$$\int_0^e \varphi = 1 \times f(1) - \int_0^1 f = e - \int_0^1 te^t dt = e - \left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) = e - (e - (e - 1)) = e - 1.$$

Problème.

I. 1. (y est solution de (E_0)) $\Leftrightarrow y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ 5y'' - 8y' + 4y \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = AY.$

2. Par méthode du pivot :

$$(P \mid I_3) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right),$$

donc P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 12 & 1 \end{pmatrix} = T.$

4. (y est solution de (E_0)) $\Leftrightarrow Y' = AY \Leftrightarrow PZ' = APZ \Leftrightarrow Z' = P^{-1}APZ = TZ.$

5. $Z' = TZ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & 2z_1 + z_2 \\ z_2' & = & 2z_2 \\ z_3' & = & z_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & 2z_1 + \lambda e^{2t} \\ z_2 : t & \mapsto & \lambda e^{2t} \\ z_3 : t & \mapsto & \mu e^t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1 : t & \mapsto & \alpha e^{2t} + \lambda t e^{2t} \\ z_2 : t & \mapsto & \lambda e^{2t} \\ z_3 : t & \mapsto & \mu e^t \end{array} \right. .$

6. Les solutions de (E_0) sont les $y : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \lambda t e^{2t} \\ \lambda e^{2t} \\ \mu e^t \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} + \lambda t e^{2t} + \mu e^t$, où $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

II. 1. L'équation homogène $8y_h' - 4y_h = 0$ a pour solutions les $y_h : t \mapsto \lambda e^{\frac{t}{2}}$.
Par méthode de variation de la constante, une solution particulière de (F_1) est alors $y_p : t \mapsto \lambda(t) e^{\frac{t}{2}}$, avec $\lambda'(t) e^{\frac{t}{2}} = \dfrac{9}{2} e^{5t}$, donc $\lambda'(t) = \dfrac{9}{2} e^{\frac{9t}{2}}$, donc $\lambda(t) = e^{\frac{9t}{2}}$ convient, donc $y_p : t \mapsto e^{5t}$ convient.
Donc $S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{\frac{t}{2}} + e^{5t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Posons $z = y''$. On a : $(F_2) \Leftrightarrow z' - 5z = \dfrac{9}{8} e^{\frac{t}{2}}$. L'équation homogène associée a pour solutions les $z_h : t \mapsto \mu e^{5t}$. Une solution particulière de l'équation est alors $z_p : t \mapsto \mu(t) e^{5t}$, avec $\mu'(t) e^{5t} = \dfrac{9}{8} e^{\frac{t}{2}}$, donc $\mu'(t) = \dfrac{9}{8} e^{-\frac{9t}{2}}$, donc $\mu(t) = -\dfrac{1}{4} e^{-\frac{9t}{2}}$ convient, donc $z_p : t \mapsto -\dfrac{1}{4} e^{\frac{t}{2}}$ convient.
Donc $y'' : t \mapsto \mu e^{5t} - \dfrac{1}{4} e^{\frac{t}{2}}$, donc $S = \left\{ y : t \mapsto \tilde{\mu} e^{5t} - e^{\frac{t}{2}} + ct + d \mid \tilde{\mu},\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$.

3. D'après les questions précédentes, l'unique solution commune à (F_1) et (F_2) est $y_p : t \mapsto 8e^{5t} - e^{\frac{t}{2}}$.

4. Par construction, $y_p : t \mapsto e^{5t} - e^{\frac{t}{2}}$ est une solution particulière de (E).

III. D'après les questions précédentes, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \left\{ y : t \mapsto \alpha e^{2t} + \lambda t e^{2t} + \mu e^t + e^{5t} - e^{\frac{t}{2}} \mid \alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$