Devoir à la maison n° 7

Exercice 1. On considère un triangle ABC. Soient A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$; puis A'' le milieu de $[B'C']$, B'' le milieu de $[A'C']$ et C'' le milieu de $[A'B']$; et ainsi de suite.

1. Faire un dessin.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $S \in \{A, B, C\}$, s_n l'affixe du point $S^{(n)}$, puis $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$, où $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, puis $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer V^4. En déduire que la matrice V est inversible, et déterminer son inverse.
   (b) Montrer que $V^{-1}MV = D$, où D est une matrice diagonale à déterminer.
   (c) On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = V^{-1}X_n$. Déterminer le terme général de la suite (Y_n).
   (d) En déduire que la suite (Y_n) converge, et déterminer sa limite.
4. En déduire que la suite (X_n) converge, et déterminer sa limite. Interpréter graphiquement.

Exercice 2. On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes généraux respectifs :

$$u_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Justifier que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n.$$
   Donner une estimation de γ à 10^{-3} près.