Corrigé du TD 26 (Rayon de convergence)

Exercice 1 :
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
a) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{2n!}$ (en comparer les coefficients à ceux de la série exponentielle).
b) $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^n$ (par encadrement).
c) $\sum_{n\geq 1} \ln(n) x^n$ (par encadrement). d) $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$.
e) $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, où a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$.
f) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!}$, où α est un réel (Reconnaître la somme).
g) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, où (a_n) est une suite convergeant vers 2024.
h) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n z^n}{n!}$. i) $\sum_{n\geq 0} n! x^{n!}$. j) $\sum_{n\geq 1} (1+\frac{(-1)^n}{n})^n x^n$. k) $\sum_{n\geq 0} tr(A^n) z^n$, où $A \in M_p(\mathbb{C})$.
Solution : Les coefficients des séries entières sont notés a_n pour simplifier.
j) Comme vu en classe (cf h)) $(1+\frac{a}{n})^n = exp(n\ln(1+\frac{a}{n})) = exp(a+o(1)) \to exp(a)$. Donc, par encadrement et à partir d'un certain rang (en examinant les limites des suite (a_{2n}) et (a_{2n+1}) qui convergent vers e et e^{-1}), il vient : $0,25 \leq |a_n| \leq 3$ et le ryon de convergence vaut $\boxed{1}$ ■
k) Puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$ et, en notant $\lambda_1, ...\lambda_s$ les valeurs propres (distinctes), χ_A est scindé et donc, avec n_i multiplicité de λ_i, il vient $tr(A^n) = \sum_{i=1}^{s} n_i \lambda_i^n$. En posant, pour $1 \leq i \leq s$, $t_i = |\lambda_i|$ et sachant que le rayon de convergence de ${}_s um_{n\geq 0} n_i \lambda_i^n z^n$ est $\frac{1}{t_i} = R_i$ (donc $+\infty$ si $\lambda_i = 0$), nous pouvons affirmer que $\boxed{\rho(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) \geq \min_{1\leq i\leq s} R_i}$. Il y a même égalité (cf cours) si les R_i sont deux à eux distincts■

....
....

Exercice 2 :
Soient les suites (u_n) et (v_n) régies par $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier n, par :
$$(\bigstar)\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$
a) Montrer que les séries entières $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n x^n$ ont même rayon de convergence, noté R.
b) En traduisant matriciellement $(\bigstar)$, déterminer (u_n) puis R.
c) Donner une expression de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, pour $x \in]-R, R[$

....
....

Exercice 3 :
On se donne une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R non nul.
a) Conjecturer la valeur du rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n^2 x^n$. Prouver votre conjecture.
b) Conjecturer la valeur du rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$. Prouver votre conjecture.
Solution : a) On a l'équivalence suivante $(a_n x^n)$ bornée $\iff (a_n^2 (x^2)^n)$ bornée. Donc (comme il est facile de le conjecturer avec les séries entières de référence) $\boxed{\rho(\sum_{n\geq 0} a_n^2 x^n) = R^2}$ ■

b) La même démarche permet de conjecturer que $\boxed{\rho(\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n) = +\infty}$.

En effet nous savons que la suite $(a_n(R/2)^n)$ est bornée et comme pour tout x réel et tout n : $\frac{a_n}{n!}x^n = a_n(R/2)^n\frac{(2x/R)^n}{n!}$, on voit bien que la suite $(\frac{a_n}{n!}x^n)$ est bien bornée, ce pour tout réel x (son TG étant produit de deux suites bornées)$\blacksquare$

....

....

Exercice 4 : ($\star\star$)

a) Soit(a_n) une suite de complexes non nuls telle que $\frac{a_{n+3}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{27}$.
Que pouvez-vous dire du rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$? (Mines)

b) Soit(a_n) une suite de complexes, on pose (pour tout n) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n$. (X - ESPCI)

c) On désigne (pour tout $n \geq 1$) par a_n le nombre de permutations de $[|1, n|]$ involutives (i.e $fof = id$).
Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$? (X - ESPCI)

Solution : a) Si nous pouvions appliquer la règle de d'Alembert à notre série et en notant R le rayon de convergence à préciser, nous aurions $R = 3$ puisque $\frac{a_{n+3}}{a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et, par passage à la limite $\frac{1}{27} = \frac{1}{R^3}$.
Prenons x non nul et $|x| < 3$ et appliquons la règle de d'Alembert pour les STP aux séries $\sum_{n\geq 0}|a_{3n+k}x^{3n+k}|$ $(k = 0, 1, 2)$, il vient $\frac{|a_{3n+3+k}x^{3n+3+k}|}{|a_{3n+k}x^{3n+k}|} = |\frac{a_{3n+3+k}}{a_{3n+k}}|x^3| \underset{n\to\infty}{\to} \frac{|x^3|}{27} < 1$.
Donc les séries $\sum_{n\geq 0}|a_{3n+k}x^{3n+k}|$ convergent et il en va de même pour la STP $\sum_{n\geq 0}|a_n x^n|$ (sommabilité par paquets). Ceci montre que $R \geq 3$ (car $R \geq |x|$ et on fait tendre x vers 3^-).
La même démarche,appliquée à la seule série correspondant à $k = 0$, conduit pour $|x| > 3$ à une limite > 1 et montre que la suite$(a_{3n}x^{3n})$ ne tend pas vers 0 donc que $R \leq 3$(même type d'explications) donc $\boxed{\text{R = 3}}\blacksquare$

b) On note R et R' les rayons à comparer. Pour tout entier naturel n : $|\frac{A_n}{n!}| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n}|a_k|}{n!}$ puis de$\binom{n}{k} \geq 1$ pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$ on tire (dans le même contexte) que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{k!(n-k)!}$ donc que $|\frac{A_n}{n!}| \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{|a_k|}{k!}\frac{1}{(n-k)!}$; on reconnaît alors en le majorant le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{|a_n|}{n!}x^n$ et de la série exponentielle ainsi $R' \geq min(R, +\infty) = R$.
Inversement $\forall n \geq 1, \frac{a_n}{n!} = \frac{A_n}{n!} - \frac{A_{n-1}}{n!}$ et les séries entières $\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n^{-1}\frac{A_{n-1}}{(n-1)!}x^n$ ont même rayon de convergence R' donc on a bien aussi $R \geq R'$ soit enfin $\boxed{\text{R = R'}}\blacksquare$

c) Commencé en classe, il sera corrigé ce lundi.