TD 28 (Séries entières. DSE)

Exercice 1 :
Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{2sh(n)x^n}{n(n+1)}$.
....
....

Exercice 2 :
Montrer que $x \to \arctan(1+x)$ est développable en série entière; déterminer son DSE ainsi que son domaine de validité.
....
....

Exercice 3 : (CCP PC 2019 écrit)
Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q1 Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

Q2 Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

Q3 Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4 En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

Q5 Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Partie II - Solution de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

Q6 Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

Q7 Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle:

$$xz'' + z' = 2x. \qquad (E_1)$$

Q8 Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q9 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I. ....
....

Exercice 4 :

On doit à Cauchy (1823) le premier exemple de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ n'étant pas DSE.

On pose $f : x \to \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a) Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etablir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.

c) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les dérivées successives de f en 0 sont nulles.

d) Etablir que la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas DSE (procéder par l'absurde).