

Séries entières

Lycée Bellevue

22 janvier 2024

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Introduction	2
1.2	Définitions. Premiers exemples	2
1.3	Rayon de convergence	3
1.3.1	Le lemme d'Abel	3
1.3.2	Définition du rayon de convergence	3
1.3.3	Intervalle ouvert, disque ouvert de convergence d'une série entière	4
2	Propriétés du rayon de convergence	5
2.1	encadrement du rayon de convergence	5
2.2	Influence des coefficients sur le rayon de convergence	5
2.3	Règle de d'Alembert pour les séries entières	5
2.4	Effet des opérations algébriques sur les rayons de convergence et les sommes de séries entières	6
2.4.1	Somme et Linéarité	6
2.4.2	Produit de Cauchy ★	6
3	Propriétés de la somme d'une série entière	7
3.1	Le principe fondamental	7
3.2	Continuité de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence	7
3.3	Intégration ou primitivation terme à terme	7
3.4	Dérivation terme à terme	8
4	Fonctions développables en série entière	10
4.1	Généralités	10
4.2	Propriétés des fonctions développables en série entière	10
4.3	Développements en série entière des fonctions usuelles	11
4.4	Formule de Taylor avec reste intégral. Application aux DSE	12
4.4.1	Formule de Taylor avec reste intégral	12
4.4.2	Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0	12

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

Les séries entières sont des séries de fonctions particulières, leurs sommes partielles sont des fonctions polynômes (cela reste imprécis, voir plus bas pour une définition) . Par exemple, puisque pour tout complexe z : $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, l'exponentielle complexe ou réelle est somme d'une telle série de fonctions . Ce n'est bien sûr pas un phénomène isolé car la plupart des fonctions élémentaires très régulières bénéficie d'un traitement analogue ; historiquement pour Newton et Euler il s'agissait de la bonne façon de « voir » les fonctions (elle se prête naturellement aux calculs approchés).

On désigne par \mathbb{S} le \mathbb{C} espace vectoriel des suites à termes complexes ; on notera a (resp. b etc...) l'élément (a_n) (resp. (b_n)) de \mathbb{S}

Pour $r > 0$, $D(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, il s'agit du disque ouvert, centré à l'origine et de rayon r ; sa frontière se notera C_r .

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans \mathbb{C} .

1.2 Définitions. Premiers exemples

Nous conviendrons de noter x (resp. z) une variable réelle (resp. complexe).

Définition 1 Une série entière de variable réelle (resp. complexe) est une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ telle

que : $\exists a = (a_n) \in \mathbb{S}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}(\text{resp. } \mathbb{C}), u_n(x) = a_n x^n (\text{resp. } u_n(z) = a_n z^n)$.

Avec un abus de notation circonscrit à ce type de séries de fonctions, on la notera $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$).

La suite a (unique, bien sûr) est la suite des coefficients de la série entière précédente et, plus précisément, $n \in \mathbb{N}$, a_n en est le **coefficient d'ordre n** (a_0 est appelé **terme constant**).

S_a désigne la somme de cette série entière.

Notons d'emblée une évidence :

Remarque 1 Pour toute série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$), S_a est au moins définie en 0 et

$S_a(0) = a_0$.

Exemple 1 i) $\sum_{n \geq 0} z^n$ est une série entière dont la somme est uniquement définie sur $D(0,1)$ par

$$S : z \rightarrow \frac{1}{1-z}.$$

ii) $\sum_{n \geq 0} n!z^n$ est une série entière dont la somme n'est définie qu'en 0.

iii) Les fonctions polynômes de variable réelle ou complexe sont sommes de séries entières partout convergentes.

iiii) La série entière $\sum_{n \geq 0} 16^n x^{4n}$ est une série entière dite **lacunaire**, car ses coefficients sont nuls pour une infinité d'indices. Sa somme n'est définie que sur l'intervalle ouvert $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

1.3 Rayon de convergence

Dans tout ce paragraphe, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ désignent des séries entières à variable complexe donc, comme cas particulier $z \leftarrow x$, à variable réelle.

Le but de cette section est de préciser ou délimiter les ensembles sur lesquels une série entière converge simplement (on le rappelle, c'est une série de fonctions d'un type particulier).

1.3.1 Le lemme d'Abel

C'est à comprendre et à savoir démontrer : tout en découle.

Proposition 1 Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée, alors, pour tout $r < |z_0|$, et pour tout $z \in D(0, r)$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

1.3.2 Définition du rayon de convergence

Désignons par X l'ensemble $\{r \geq 0, (a_n r^n)_n \text{ soit une suite bornée}\}$; il s'agit d'une partie non vide (0 y appartient) de \mathbb{R} . Dès lors :

Définition 2 Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est : $\begin{cases} \sup(X) & \text{si } X \text{ est majoré} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Dans tous les cas de figure, il sera noté $\rho(\sum_{n \geq 0} a_n z^n)$ (resp. $\rho(\sum_{n \geq 0} a_n x^n)$).

Il s'agit donc d'un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Exercice 1 Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} n^{2024} x^n$ vaut 1.

Proposition 2 (Caractérisation du rayon de convergence dans les cas extrêmes)

i) $\rho(\sum_{n \geq 0} a_n z^n) = +\infty \Leftrightarrow$ la suite $(a_n z^n)$ est bornée pour tout $z \in \mathbb{K} \Leftrightarrow$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (A)CV pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(La somme d'une telle série entière est définie pour toute valeur de la variable qu'elle soit réelle ou complexe)

ii) $\rho(\sum_{n \geq 0} a_n z^n) = 0 \Leftrightarrow$ la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée pour tout $z \in \mathbb{K}^*$.

Proposition 3 Régionnement du plan complexe et de la droite réelle

On pose $R = \rho(\sum_{n \geq 0} a_n z^n) < +\infty$.

i) La série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$.

ii) La série diverge grossièrement si $|z| > R$.

1.3.3 Intervalle ouvert, disque ouvert de convergence d'une série entière

On convient que, pour $R = +\infty$, $D(0, R) = \mathbb{C}$.

Définition 3 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$) une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

$D(0, R)$ est le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et C_R en est le cercle d'incertitude si $R < +\infty$.

$] -R, R[$ est l'intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et, dans le cas R fini, les points $\pm R$ en sont les points d'incertitude.

Le comportement d'une série entière est, quelle qu'elle soit, parfaitement déterminé dans le disque (ou intervalle) ouvert de convergence et aussi dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$ (ou $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$).

Remarque 2 On ne peut rien dire a priori dans la zone d'incertitude. Tout ou presque y est possible. Voilà quelques exemples pour lesquels $R = 1$:

i) $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge en tout point C_1 .

ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge tout point C_1 .

iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge en -1 et diverge en 1 .

Chapitre 2

Propriétés du rayon de convergence

Elles sont données pour le cas de la variable complexe (qui contient le cas réel).

On se donne $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

2.1 encadrement du rayon de convergence

En revenant à la définition du rayon de convergence, on dispose de cette propriété très utile pour estimer le rayon de convergence d'une série entière.

Proposition 4 Soient $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$.

i) Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors $R_a \geq |z_0|$.

ii) Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ diverge alors $R_a \leq |z_1|$.

♡♡ L'idéal étant de pouvoir combiner i) et ii) avec $|z_0| = |z_1|$.

Exemple 2 Soit, pour $n \geq 1$, $a_n =$ la n -ième décimale de π ; nous voulons déterminer R_a .

La suite $(a_n 1^n = a_n)$ est bornée puisque une décimale est comprise entre 0 et 9.

La série $\sum_{n \geq 0} a_n 1^n$ diverge grossièrement puisque dans le cas contraire la suite d'entiers (a_n) devrait converger

vers 0 c.a.d stationner sur 0 ce qui impliquerait que π soit un rationnel. Donc $R_a = 1$.

2.2 Influence des coefficients sur le rayon de convergence

Proposition 5 i) Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\rho\left(\sum \lambda a_n z^n\right) = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

ii) Si $a_n = O(b_n)$ alors $\rho\left(\sum a_n z^n\right) \leq \rho\left(\sum b_n z^n\right)$.

(Cas particulier $a_n = o(b_n)$ et $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang).

ii) Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum b_n z^n\right)$ (Résulte de ii)

iii) $\rho\left(\sum n^p a_n z^n\right) = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$, ce pour tout $p \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \rho\left(\sum_{n \geq 1} n^\alpha z^n\right) = 1$

2.3 Règle de d'Alembert pour les séries entières

♠♠♠ La règle suivante a pour elle d'être du type formule mécanique mais ne peut pas toujours s'appliquer ou n'est pas toujours pertinente (attention aux séries entières lacunaires).

Proposition 6 On suppose :

i) qu'à partir d'un certain rang $a_n \neq 0$,

ii) il existe $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$.

ALORS : $R_a = \frac{1}{L}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0$.

Exemple 3 Soit à déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n+1)!}$.

En posant, pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, il vient $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4}$ donc, par la règle de d'Alembert $R_a = 4$.

2.4 Effet des opérations algébriques sur les rayons de convergence et les sommes de séries entières

2.4.1 Somme et Linéarité

Proposition 7 i) $\rho\left(\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n)z^n\right) \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

ii) De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

2.4.2 Produit de Cauchy ★

Définition 4 On appelle produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$,

où pour tout entier n : $c_n = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$.

Remarque 3 On observera, en fixant z , qu'il ne s'agit rien d'autre que du produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ comme il a été défini dans le chapitre consacré aux séries. Le résultat suivant n'est donc pas surprenant.

En gardant les notations de la définition précédentes :

Proposition 8 i) $\rho\left(\sum_{n \geq 0} c_n z^n\right) \geq \min(R_a, R_b)$.

ii) $\forall z, |z| < \min(R_a, R_b), \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$.

Exemple 4 Considérons les deux séries entières de variable réelle $\sum_{n \geq 0} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ dont le rayon de convergence est 1. Nous désirons en déterminer le produit de Cauchy. Pour cela on note a_n (resp. b_n) leur coefficient d'ordre n . Ainsi avec les notations précédentes : $c_n = \sum_{p=0}^n a_{n-p} b_p$. Mais $a_{n-p} b_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Il en ressort que c_n est égal au nombre de couples (p, q) tels que $p+2q = n$ et que par ailleurs $\rho\left(\sum_{n \geq 0} c_n z^n\right) \geq 1$.

On donnera suite à cet exemple plus loin.

Chapitre 3

Propriétés de la somme d'une série entière

On se donne une série entière de variable réelle $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$. On note S sa somme et I son intervalle ouvert de convergence.

3.1 Le principe fondamental

Toute ce chapitre repose sur ce résultat.

Théorème 1 La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de I , son intervalle ouvert de convergence

Remarque 4 ⚠ On ne simplifiera pas ce théorème en confondant la CVN sur tout segment de I et la CVN sur I , faute cardinale stigmatisée par tous les rapports de jury.
En effet la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$, de rayon de convergence 1, ne converge pas normalement sur $] -1, 1[= I$ puisque $\sup_{x \in I} (|x^n|) = 1$.

3.2 Continuité de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence

Grâce au théorème C^0 pour les séries de fonctions et la section précédente, il vient sans peine.

Proposition 9 S est continue sur I .

Toujours par le théorème C^0 pour les séries de fonctions, on dispose du raffinement suivant :

Proposition 10 $R < +\infty$.
Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge absolument alors S est continue sur $[-R, R]$; en effet il y a cette fois CVN de la série entière sur $[-R, R]$.
(Par exemple $x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1, 1]$)

3.3 Intégration ou primitivation terme à terme

Grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment pour une série de fonctions, nous avons :

Proposition 11 Pour tout $x \in I$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(Ce qui sous-entend que la série $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge)

Exemple 5 Cette proposition est une machine à formule (♥).

De la relation $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ valable pour $x \in]-1, 1[$, on déduit par intégration sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$:

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Remarque 5 ♥ Pour utiliser ce résultat, il vous suffira de préciser que vous intégrez terme à terme la somme d'une série entière **sur un segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence.**

3.4 Dérivation terme à terme

Le théorème de dérivation successive pour les séries de fonctions (voir plus loin pour les détails) permet d'énoncer :

Théorème 2 i) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\rho\left(\sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}\right) = R$.

ii) S est C^∞ sur $] - R, R[$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in] - R, R[$:

$$S^{(p)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^{(p)} \text{ soit}$$

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n \text{ ou } S^{(p)}(x) = p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p} x^n.$$

iii) En particulier $\forall p \geq 0$, $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$.

Preuve 1 Nous prouvons que nous pouvons dériver terme à terme sur $I =] - R, R[$ à l'ordre p .

Pour tout entier n , $u_n : x \in I \rightarrow a_n x^n$ est de classe C^p sur I .

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ CVS sur I .

Grâce à i) la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n^{(q)}$ CVN sur tout segment de I , ce pour tout entier $q \leq p$.

Par le théorème de dérivation successive pour les séries de fonctions, appliqué à $\sum_{n \geq 0} u_n$, on peut donc

affirmer que la somme de cette série de fonctions (à savoir S) est de classe C^p sur I et que ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme ■

Remarque 6 ♥ Pour utiliser ce résultat, il vous suffira de préciser que vous dérivez terme à terme la somme d'une série entière **sur son intervalle ouvert de convergence.**

Exemple 6 Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ étant égal à 1, en dérivant terme à terme la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$, il vient :

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in] - 1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n$ (formule utile en probabilité qui, soit vous est donnée, soit vous est proposée en tant que question.)

Une conséquence fondamentale du théorème précédent est une généralisation d'un fait bien connu concernant les polynômes (principe des identités algébriques) ; on convient d'appeler **voisinage de 0 tout intervalle ouvert contenant 0.**

Théorème 3 Soient deux séries séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ dont les sommes coïncident au voisinage de 0.

Alors $\forall n \geq 0, a_n = b_n$.

Chapitre 4

Fonctions développables en série entière

4.1 Généralités

Définition 5 Soit f définie au voisinage de 0.

f est dite développable en série entière (DSE) s'il existe une série entière de rayon de convergence strictement positif dont la somme coïncide avec f au voisinage de 0.

Par le théorème précédent cette série entière est alors unique et l'égalité entre f et la somme de cette unique série entière (sur un intervalle $] -r, r[$, $r > 0$) est le développement en série entière (DSE) de f sur $] -r, r[$.

Exemple 7 $f : x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ est DSE sur $] -1, 1[$ puisque $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sur cet intervalle (et uniquement sur celui-ci).

4.2 Propriétés des fonctions développables en série entière

Il découle de la définition précédente et de la fin du chapitre 3 que :

Proposition 12 Soit f DSE sur l'intervalle $] -r, r[$, $r > 0$.

i) f est de classe C^∞ sur $] -r, r[$.

ii) Le DSE de f sur $] -r, r[$ est : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarque 7 On pourra observer qu'une fonction f DSE est paire (on effectuera la traduction pour les fonctions impaires) si et seulement si, au voisinage de 0, il existe une suite (a_n) de \mathbb{S} telle que (au voisinage de 0) : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$.

On verra en exercice (4 TD 28) qu'il existe des fonctions C^∞ qui ne sont pas DSE.

On étudie maintenant le comportement de la notion de fonctions DSE vis à vis de certaines opérations algébriques.

Proposition 13 Soient f, g DSE sur le même intervalle I de \mathbb{C} DSE sur I :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

i) Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ est DSE sur I et :

$$\forall x \in I, (f + \lambda g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) x^n.$$

ii) fg est DSE sur I et :

$$\forall x \in I, fg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \text{ ce pour tout } n \text{ (produit de Cauchy).}$$

Remarque 8  Rien sur le quotient ou la composée de fonctions DSE.

En revanche et en vertu du chapitre précédent :

Proposition 14 Soit f DSE sur l'intervalle I de DSE sur I : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

i) Si F est une primitive sur I de f , F est DSE sur I et $\forall x \in I$

$$: F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

ii) f' est DSE sur I , son DSE s'obtenant par dérivation terme à terme à partir de celui de f .

4.3 Développements en série entière des fonctions usuelles

Proposition 15 i) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\exp(\alpha x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$).

ii) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ($x \in \mathbb{R}$). iii) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($x \in \mathbb{R}$).

iv) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($x \in \mathbb{R}$).

v) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ($x \in]-1, 1[$).

Puis par intégration terme à terme :

vi) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ et $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ($x \in]-1, 1[$).

vii) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($x \in]-1, 1[$).

Enfin :

viii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ ($x \in]-1, 1[$), où on a posé $\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!}$ donc en particulier

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \text{ et } \binom{\alpha}{1} = \alpha.$$

On pourra aussi retenir que pour $a \in \mathbb{C}^*$:

ix) $\frac{1}{a-x} = \frac{1/a}{1-x/a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ($|x| < |a|$).

Exemple 8 Montrer que la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ est DSE et le trouver.

On voit aisément que f est le produit de deux fonctions DSE sur $] -1, 1[$, ce qui prouve que f l'est aussi sur ce même intervalle.

Par ailleurs (décomposition en éléments simples) : $f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1-x)^2}$. On trouve aisément $a =$

$$b = 1/4 \text{ et } c = 1/2 \text{ et en utilisant les DSE usuels, il vient pour } x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{n+1}{2} \right) x^n.$$

Donc en utilisant l'exemple 4, on en déduit (par unicité des coefficients d'une série entière) que le nombre

de façons de payer n euros avec des pièces de un et deux euros est $\frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{n+1}{2}$

4.4 Formule de Taylor avec reste intégral. Application aux DSE

4.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

On prouve par récurrence et par intégrations par parties.

Théorème 4 Soient $n \in \mathbb{N}$ et f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx.$$

(Formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre n aux points $\{a, b\}$).

4.4.2 Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0

Définition 6 Pour f de classe C^∞ au voisinage de 0, on nomme série de Taylor de f , la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Voici le seul critère théorique dont nous disposons pour montrer qu'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 est développable en série entière. Il s'appuie sur la formule de Taylor avec reste intégral vue plus haut.

Proposition 16 Soit f de classe C^∞ au voisinage de 0.

f est DSE en 0 ssi :

$$\exists r > 0, \forall x \in]-r, r[, \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$