TD 28 (Séries entières. DSE)

Exercice 1 :
Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} \frac{2sh(n)x^n}{n(n+1)}$.

Solution : On note S la somme de cette série entière; elle est définie sur $I =]-1/e, 1/e[$.
Méthode donnée et calculs menés presqu'au bout.
On trouve ($x \in I$) : $\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(x) = \frac{1-ex}{ex}\ln(1-ex) + \frac{x-e}{x}\ln(1-x/e) \text{ sinon}}$ ■

....
....

Exercice 2 :
Montrer que $x \to \arctan(1+x)$ est développable en série entière; déterminer son DSE ainsi que son domaine de validité.

Solution : On reprend là où on avait laissé les calculs.
On pose $f(x) = \arctan(1+x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
En posant $\alpha = -1+i$, on a trouvé $f'(x) = \frac{1}{2i}(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\overline{\alpha}})$ ou encore (en posant $\beta = \frac{1}{\alpha}$) :
$f'(x) = \frac{1}{2i}(-\frac{\beta}{1-\beta x} + \frac{\overline{\beta}}{1-\overline{\beta}x})$.
Dès lors pour $|x| < |\alpha| = \sqrt{2} = R$, $f'(x) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{\beta}^{n+1} - \beta^{n+1})x^n$.
Ceci montre que f' est DSE sur l'intervalle $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[= I$ et donc qu'il en va de même pour f et par primitivation terme à terme (sur le segment $[0,x], x \in I$), il vient :
$\forall x \in I, f(x) - f(0) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\overline{\beta}^{n+1} - \beta^{n+1})x^{n+1}}{n+1}$.
En observant que $\alpha = \sqrt{2}\exp(3i\pi/4)$ donc que $\beta = \frac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, nous avons $\frac{(\overline{\beta}^{n+1} - \beta^{n+1})}{2i} = -\Im(\beta^{n+1}) = \frac{\sin(\frac{3(n+1)\pi}{4})}{(\sqrt{2})^{n+1}}$ et (puisque $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$) :

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{3(n+1)\pi}{4})}{(\sqrt{2})^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$ ■

....
....