Feuille d'exercices 12
POLYNÔMES

1 - L'ENSEMBLE $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. Déterminer les polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

(a) $Q^2 = XP^2$.

(b) $P \circ P = P$.

Exercice 2.

(a) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1$.

(b) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X)^2 = 4P(X)$.

(c) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$.

2 - DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{K}[X]$

Exercice 3. Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q :

(a) $P = X^3 - 1$, $Q = X + 2$,

(b) $P = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$,
$Q = 2X^2 + 1$,

(c) $P = 3X^2 + 6X + 5$, $Q = iX + 1 + i$,

(d) $P = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$,
$Q = X^2 + (1-i)X + 1 + i$.

Exercice 4. Déterminer les $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 5. Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 6. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$, et soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

(b) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 8. Soit (n,p) dans $\mathbb{N}^2$.

(a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.

(b) Montrer l'équivalence : $X^p - 1 \,\big|\, X^n - 1 \Leftrightarrow p \,\big|\, n$.

3 - DÉRIVATION DANS $\mathbb{K}[X]$

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q' = P$. Montrer qu'un tel polynôme est unique si l'on rajoute la condition supplémentaire $Q(0) = 0$.

Exercice 10. Soit $E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

(b) On note D l'application $D : \begin{cases} E \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$. Montrer que D est bijective.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(1) = k$.

4 - Racines et factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 12. Factoriser les polynômes :

(a) $X^5 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$,

(b) $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$,

(c) $(X+1)^n - (X-1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
Montrer que les racines de P sont simples.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

(a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors a^2 et $(a-1)^2$ le sont aussi.

(b) En déduire que si a est une racine de P, alors $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.

(c) Montrer que les racines de P appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, -j, -j^2\}$.

(d) Déterminer alors tous les polynômes vérifiant la relation de départ.

Exercice 15. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 16. Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 17. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,,\ \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k+1\ .$$

Exercice 18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré $n \geq 2$.

(a) Dans cette question, on suppose que P est à racines simples. Montrer que P' est scindé.

(b) Soit x_0 une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que x_0 est une racine de P' de multiplicité $m-1$.

(c) En déduire que P' est scindé.

Exercice 19. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.

(a) Si P a n racines distinctes $r_1, \ldots, r_n$, montrer que $\displaystyle\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - r_k}$.

(b) Si P a m racines distinctes $r_1, \ldots, r_m$ de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, montrer que $\displaystyle\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{X - r_k}$.

Exercice 20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines du polynôme $P_n = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2in\alpha}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$.