Corrigé TD 27 (Probabilités)

Exercice 1 : CCINP

Un concours de tir entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chaque compétiteur, en un tir visant à atteindre une cible. A et B tirent simultanément, l'un et l'autre disposant d'une cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire pour laquelle il ne sera pas nécessaire de définir un espace probabilisé. On émet néanmoins les hypothèses suivantes :
A chaque tir :
i) la probabilité que A touche sa cible est de $\dfrac{2}{3}$.
ii) la probabilité que B touche sa cible est de $\dfrac{1}{2}$.
iii) les performances de A et B sont indépendantes.
Les tirs successifs sont mutuellement indépendants.
A l'issue de chaque tir, il faut avoir touché sa cible pour poursuivre la compétition; sinon, le candidat est éliminé. Le concours cesse dès que A et B sont éliminés.
Pour n entier naturel non nul, on considère les événements :
A_n : A est le seul à rester en lice à l'issue du $n-ième$ tir,
B_n : B est le seul à rester en lice à l'issue du $n-ième$ tir,
C_n : aucun candidat n'est éliminé à l'issue du $n-ième$ tir,
D_n : les deux candidats sont éliminés à l'issue du $n-ième$ tir.
1) Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n), \mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n)$ puis $\mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n)$ et $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(D_n) \end{pmatrix}$.

2) A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver qu'il existe une matrice $M \in M_4(\mathbb{R})$ à déterminer, telle que : $\forall n \geq 1, X_{n+1} = MX_n$.

On pose $\Delta = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Que vaut $P\Delta P$?
4) En déduire que $M^n = P\Delta^n P$, ce pour tout n.
5) Déterminer avec le moins de calculs possible : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Solution : 1) Ces probabilités conditionnelles se calculent en analysant chacune d'entre-elles; compte tenu des hypothèses, elles ne dépendent pas du nombre de tirs !!!
Sachant que A est seul en lice, la probabilité qu'il le reste est donc qu'il touche la cible donc $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = 2/3$.
De façon criante $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 0$.
Si les deux tireurs sont toujours dans la course, pour que A soit seul à ne pas êtré éliminé il faut et il suffit qu'il atteigne la cible et que B ne touche pas la sienne; il s'agit donc de l'intersection de deux événements indépendants (l'énoncé nous l'assure) de probabilité $\dfrac{2}{3} \times (1 - 1/2) = 1/3$ donc $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n) = 1/3$.
On obtient de même :
$\mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n) = 0, \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = 1/2, \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n) = 1/6$, $\mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 0$ puis
$\mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n) = 0, \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n) = 1/3$ et $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n) = 1/3, \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n) = 1/2, \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n) = 1/6$■
2) L'entier n étant fixé, (A_n, B_n, C_n, D_n) constitue à l'évidence un système complet d'événements avec lequel nous allons utiliser la formules des probabilités totales qui nous donne :
$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + 0 \times \mathbb{P}(B_n) + \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(C_n) + 0 \times \mathbb{P}(D_n)$; on procède de même avec les autres événements et

on obtient $M=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$■

3) et 4) Des calculs indolores donnent $P\Delta P = M$, $P^2 = I_4$ donc $P^{-1} = P$ et enfin pour tout entier naturel n : $M^n = P\Delta^n P$■

5) On a d'abord pour tout entier n : $X_n = M^n X_0 = P\Delta^n PX_0$; comme la suite (Δ^n) converge vers $D = diag(0,0,0,1)$, $X_n \to L = PDPX_0$.

Un calcul simple donne $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbb{P}(A_0)+\mathbb{P}(B_0)+\mathbb{P}(C_0)+\mathbb{P}(D_0)=1 \end{pmatrix}$.

En particulier $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n) = 1$■

Exercice 2 : (D'après X-ESPCI)

1) Déterminer le spectre de $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis celui de $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

2) On dispose d'une urne contenant une infinité de jetons numérotés par les entiers naturels.
On procède à des tirages indépendants avec remise.
Pour $i \in [|0,3|]$ et $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $m \equiv i$ le fait que m soit de la forme $4k+i$ pour un certain entier k.
On désigne par p_i , $i \in [|0,3|]$, la probabilité de tirer une boule dont le numéro m vérifie $m \equiv i$. Au bout de $n \geq 1$ tirages on désigne par S_n la somme des numéros tirés et $A_{n,i}$ l'événement $S_n \equiv i$, pour $i \in [|0,3|]$. On suppose $p_3 > 0$ (?), prouver que $\mathbb{P}(A(n,0)) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4}$.
NB : $m \equiv i$ se lit m congru à i.

Solution : 1) On peut observer que $J^4 = I_4$ donc que $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de J (scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples) donc le spectre complexe de J est inclus dans $\{1,-1,i,-i\}$ et J est diagonalisable. Mais ceci ne nous donne pas exactement le spectre.
On se résigne à calculer le polynôme caractéristique de J et on trouve $\chi_J = \lambda^4 - 1$ donc le spectre de J est l'ensemble $\{1,-1,i,-i\}$.
En calculant J^2 et J^3, il vient $M = aI_4 + bJ + cJ^2 + dJ^3$ et comme il existe $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$, où $J = diag(1,-1,i,-i)$. Dès lors $M = P(aI_4 + bD + cD^2 + dD^3)P^{-1}$ et le spectre de M est l'ensemble des coefficients diagonaux de la matrice diagonale $aI_4 + bD + cD^2 + dD^3$ soit $Sp(M) = \{a+b+c+d, a-b+c-d, a+ib-c-id, a-ib-c+id\}$■

2) Pour chaque n, $(A(n,i)_{0\leq i\leq 3}$ est un système complet d'événements.
Fixons l'entier $0 \leq j \leq 3$ et intéressons nous aux probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A(n+1,j)|(A(n,i))$. On dispose donc d'une somme d'entiers congrue à i et après tirage supplémentaire d'une boule l'ajout du numéro de la boule tirée (à la somme précédente) donne un entier congru à j; ceci correspond donc au fait que le numéro de la dernière boule tirée est congru à $j-i$ si $j \geq i$ et $4+j-i$ sinon.

Ainsi $\mathbb{P}(A(n+1,j)|(A(n,i)) = \begin{cases} p_{j-i} & \text{si } j \geq i \\ p_{4+j-i} & \text{sinon} \end{cases}$

En posant, pour tout entier m, $X_m = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A(m,0)) \\ \mathbb{P}(A(m,1)) \\ \mathbb{P}(A(m,2)) \\ \mathbb{P}(A(m,3)) \end{pmatrix}$, il vient donc avec les probabilités totales et les probabilités conditionnelles précédentes :
$\forall n \geq 0, X_{n+1} = MX_n$, où M est la matrice du 1), obtenue en posant $a = p_0, b = p_3, c = p_2, d = p_1$. Pour montrer que la suite (X_n) converge, il nous suffit de vérifier que la suite de matrice (M^n) converge donc (cf 1)) que la suite (Δ^n) converge, où on a posé $\Delta = diag(A = a+b+c+d, B = a-b+c-d, C = a+ib-c-id, D = a-ib-c+id$. On a bien sûr $A = 1$, on va déterminer des conditions sur les p_i pour que les autres valeurs propres soient de module strictement < 1 (d'où mon ?). Par inégalité triangulaire $|B| \leq A = 1$; deux possibilités $B = 1$ auquel cas $b = d = 0$ ou $B = -1$ auquel cas $a = c = 0$. Les deux autres valeurs propres étant conjuguées, elles ont même module. On a $|C|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd \leq a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd+2ad+2ab+2bc+2cd \leq (a+b+c+d)^2 = 1$. En résumé en supposant par

exemple $b = p_3 \neq 0$ et $a = p_0 \neq 0$ nous sommes sûrs que B, C et D sont de module strictement inférieurs à 1 (donc différents de 1, ce qui montre que $A = 1$ est valeur propre simple de M). Ainsi les suites (B^n), (C^n) et (D^n) convergent elles vers 0 et la suite (Δ^n) converge bien.
Notons L la limite de la suite (X_n), par passage à la limite dans la relation $X_{n+1} = MX_n$ nous obtenons $L = ML$ donc $L \in Ker(M - I_4) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, comme la somme des composantes de chaque X_n vaut 1, il en va de même pour L par passage à la limite et ainsi $L = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ ■