DS6 (2h) CCINP

Exercice 1 :
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.
2. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
   Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
   (c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).
   (d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
   On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.
6. Justifier que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Solution : 1) Récurrence sans difficulté (mise à part la lecture de l'énoncé donné en esperanto).
2) La majoration de l'encadrement précédent donne ceci immédiatement.
3) a) $\boxed{1}$ ■
b) Au moins $]-1,1[$ et inclus dans $[-1,1]$. Il y a évidemment divergence en 1 et convergence en -1 (Leibniz) donc l'ensemble à trouver $\boxed{[-1,1[}$ ■
c) Par théorème une série entière produit de deux autres possède un rayon de convergence supérieur ou égal au minimum des deux facteurs donc ici $\boxed{1}$.

En tant que produit de Cauchy, il vient (et pour tout n) : $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} = (n+1)a_{n+1}$.

d) En vertu de ce qui précède, il vient, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = f(x)(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2})$.

Soit, par dérivation terme à terme, la relation voulue■

4) On remarque que, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) \geq a_0 = 1 > 0$ ainsi, avec la question précédente, nous avons (pour les mêmes x!) : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

Dès lors par primitivation terme à terme sur le segment $[0,x]$, il vient $\ln(f(x)) - \ln(f(0)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Et puisque $f(0) = a_0 = 1$, la relation désirée en découle■

5) En utilisant la décomposition en éléments simples suggérée, nous avons :

$\forall x \in [0,1[, \ln(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

On reconnaît en la première somme le DSE de $x \to -\ln(1-x)$; il s'ensuit que :

$\forall x \in [0,1[, \ln(f(x)) = -\ln(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)}{x} + 1$.

Soit $\boxed{\forall x \in [0,1[, f(x) = \dfrac{e}{1-x} exp(\dfrac{\ln(1-x)}{x})}$■

6) La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout $\in]-1,1[$ donc pour $x = 1/2$. Grâce à la question précédente on a immédiatement $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{e}{2}}$■

....

....

Exercice 2 :

On considère une suite de jets indépendants d'une même pièce, pouvant donner Face avec la probabilité $0 < p < 1$ et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

On considère que l'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour lequel ($n \geq 1$) :

- F_n: " le n-ième jet a donné face",
- P_n : " le n-ième jet a donné pile", et
- E_n : " le n-ième jet a donné face, face pour la première fois"(la probabilité de cet événement sera noté p_n)

sont des événements.

1) Expliciter les événements E_1, E_2, E_3 et déterminer leur probabilité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Justifier l'égalité $\mathbb{P}(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$.

3) Prouver que $E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}$.

4) En déduire la relation suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+3} = p^2 q(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i)$

On convient de poser $p_0 = 0$.

5) Etablir que la série $\sum p_n$ est convergente (cf Q2) et que sa somme est inférieure à 1.

6) En déduire que la fonction $G : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ est définie pour tout $x \in [-1,1]$ et qu'elle y est continue.

7) Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} p_k) x^n$ en fonction de x, $G(x)$ pour $|x| < 1$.

8) En déduire que pour $|x| < 1$, $G(x) = \dfrac{p^2 x^2 (1-px)}{1 - x + p^2 q x^3}$.

Solution : 1) On a clairement : $E_1 = \emptyset$, $E_2 = F_1 \cap F_2$ et $E_3 = P_1 \cap F_2 \cap F_3$donc, par indépendance supposée des jets, $p_1 = 0$,$p_2 = p^2$ et $p_3 = qp^2$■

2) Les E_i étant deux à deux incompatibles, l'additivité de $\mathbb{P}$ nous assure de ceci■

3) E_{n+3} est l'événement obtenir Face sur les deux derniers lancers obligatoirement Pile au n+1 -ième lancer et jamais Face,Face jusqu'au n-ième lancer. D'où la relation voulue■

4) Par indépendance et pour tout $n \geq 1$ avec 3) $p_{n+3} = p^2 q \mathbb{P}(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i})$. Or $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}$; en utilisant 2), il vient bien $\boxed{p_{n+3} = p^2 q(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i)}$. On peut remarquer que la formule est vraie si $n = 0$■

5) La question 2) montre que les sommes partielles de la STP $\sum p_n$ sont majorées par 1. Ainsi cette série

converge bien et sa somme est (conservation des inégalités à la limite) inférieure à 1■
6) La convergence absolue de $\sum p_n$ donne la CVN sur $[-1,1]$ de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} p_n x^n$ donc de la continuité sur ce même segment de sa somme (G ici)■
7) On reconnaît le produit de Cauchy des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} p_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ qui converge bien sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ (le minimum des deux rayons de convergence valant 1) et on a :
$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k)x^n = \dfrac{G(x)}{1-x}}$■
8) Par ailleurs 4) donne aussi $p^2q(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k) = p^2q - p_{n+3}$, ce pour tout n. En multipliant cette relation par x^{n+3} et en sommant sur n, nous obtenons (avec l'égalité obtenue en 7) : $p^2q\dfrac{x^3G(x)}{1-x} = \dfrac{p^2qx^3}{1-x} - G(x) + p_1x + p_2x^2$, ce pour $x \in]-1,1[$. Soit aussi $(p^2qx^3 + 1 - x)G(x) = p^2qx^3 + p^2x^2(1-x)$ ou enfin (et pour $x \in]-1,1[$) :
$\boxed{G(x) = \dfrac{p^2x^2(1-px)}{1-x+p^2qx^3}}$.
La continuité en 1 des deux membres de cette égalité donne par passage à la limite $G(1) = 1 \Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ i.e la famille (E_n) est un système quasi-complet d'événements et le fait d'obtenir au moins une fois Face,Face est un événement presque sûr■