Corrigé du DS6 (2h) Centrale

1 Des formules

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

1. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in\,]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in\,]-R, R[\, \setminus \{0\}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{1}$$

3. En déduire que, pour tout $x \in\,]-R, R[\, \setminus \{0\}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}. \tag{2}$$

2 Pile ou face infini

On considère la répétition infinie et indépendante du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p.
Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour lequel ($(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$):
$X_{n,k}$: « à l'issue des n premiers lancers, il y a exactement k piles »,
A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces »,
B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces » soient des événements.
On pose aussi : C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces » Pour les deux questions suivantes on se donne $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

5. Que vaut $\mathbb{P}(X_{n,k})$ si $k > n$?

6. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :
$\mathbb{P}(X_{n+1,k}) = (1-p)\mathbb{P}(X_{n,k}) + p\mathbb{P}(X_{n,k-1})$.

7. En déduire que $\mathbb{P}(X_{n,k}) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

8. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles.

9. Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

10. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

11. À l'aide notamment de la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

12. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (1)).

13. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.

••• FIN •••

Solution : 1) La règle de d'Alembert s'applique bien puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} > 0$ et que $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4$. Donc $\boxed{R = \frac{1}{4}}$.

Dans votre cours (s'y reporter) nous avons montré (avec un luxe de détails) que :
$\forall t \in]-1,1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} t^n$ donc, ($t = 4x$, où $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[= \boxed{\mathrm{I}}$) :
$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}}$ ■

2) En intégrant terme à terme l'égalité précédente sur le segment $[0,x]$, où $x \in I$, nous obtenons :
$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-4t}} = [-\sqrt{1-4t}]_0^x = 1 - \sqrt{1-4x}$, ceci pour tout $x \in I$.
Il suffit alors de diviser par x■

3) Le membre de gauche de l'égalité à prouver est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$. On peut définir la somme de ce produit de Cauchy sur I et on a :
$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1})$ donc, pour $x \in I, x \neq 0$ et grâce aux questions 1) et 2),
$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}) = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right)$■

4) Pour tout $x \in I, x \neq 0$, $\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2} x^n$, ce après changement d'indice.
Cette égalité est aussi vraie pour $x = 0$ (On trouve 1 pour les deux membres) donc on dispose de l'égalité de deux sommes de séries entières sur un voisinage de 0.

Par unicité des coefficients d'une série entière, il vient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}}$ ■

5) Dans ce cas $X_{n,k}$ est l'événement impossible donc $\mathbb{P}(X_{n,k}) = 0$ si $k > n$■

6) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(X_{n,i})_{i\geq 0}$ est un système complet d'événements pour lequel $X_{n+1,k} \cap X_{n,i} = \emptyset$ si $i < k-1$ ou $i > k+1$ donc la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(X_{n+1,k}) = \mathbb{P}(X_{n+1,k}|X_{n,k})\mathbb{P}(X_{n,k}) + \mathbb{P}(X_{n,k-1}) = (1-p)\mathbb{P}(X_{n,k}) + p\mathbb{P}(X_{n,k-1})$, tout ceci pour $k \geq 1$.
Si $k = 0$ la formule reste valable car $X_{n,-1}$ est l'événement impossible■

7) On procède par récurrence forte ($m \in \mathbb{N}*$) $(H_m) : \mathbb{P}(X_{n,k}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ si $n + k \leq m$.

On valide aisément le cas $m = 1$ (seule possibilité $n = 1$ et $k = 0$).

On suppose (H_m) établie pour un $m \in \mathbb{N}^*$ et on se donne (n,k) tel que $n+k=m+1$.
i) $n=1$ alors ou $k>1$ et $\mathbb{P}(X_{n,k})=0$; ce qui est, dans ce cas, la formule à obtenir. Ou $k=1$ et, là encore, la formule se valide aisément.
ii) $n \geq 2$ alors avec 6) $\mathbb{P}(X_{n,k}) = (1-p)\mathbb{P}(X_{n-1,k}) + p\mathbb{P}(X_{n-1,k-1})$ donc, avec (H_m), $\mathbb{P}(X_{n,k}) = (1-p)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} + p\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, en utilisant la relation de Pascal. Ceci montre l'hérédité de notre formule de récurrence et clôt le raisonnement■
8) C'est évident. Mais il fallait comprendre qu'il s'agissait d'une deux à deux incompatibilité■
9) C étant la réuion de tous les B_n, il s'agit bien d'un événement en tant que réunion dénombrable d'événements. Par sigma additivité (la famille étant constituée d'événements deux à deux incompatibles), on a bien $\boxed{\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)}$■
10) La famille (B_n) à laquelle on rajoute $B_0 = \Omega \setminus C$ est un système complet d'événements pour lequel la formule des probabilités totales implique ($n \in \mathbb{N}^*$ étant donné) :
$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|B_k)\mathbb{P}(B_k)$.
A l'évidence $\mathbb{P}(A_n|B_k) = 0$ si $k=0$ ou $k>n$ donc la formule précédente se résume à :
$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n|B_k)\mathbb{P}(B_k)$.
Fixons $k \in [|1,n|]$, la probabilité d'avoir obtenu autant de piles que de faces sur $2n$ lancers sachant que ceci a eu lieu une première fois au rang k est aussi la probabilité d'obtenir autant de faces que de piles après $2(n-k)$ jets. Il en résulte bien que :
$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$■
11) On procède par récurrence forte. Pour $n=1$, $B_1 = (F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)$ donc $\mathbb{P}(B_1) = 2p(1-p) = \frac{2}{1}\binom{2-2}{1-1}\left(p(1-p)\right)^1$. Voilà pour l'initialisation.
On suppose la formule établie jusqu'au rang $n-1$ et en utilisant Q10, il vient :
$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$ puis ,avec Q7 (avec $n \leftarrow 2(n-k)$ et $k \leftarrow n-k$) $\mathbb{P}(A_{n-k}) = \binom{2n-2k}{n-k}(p(1-p))^{n-k}$ et notre hypothèse de récurrence, nous obtenons :
$\mathbb{P}(B_n) = (\binom{2n}{n} - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}\binom{2n-2k}{n-k})(p(1-p))^n$.En posant $j=k-1$ dans la dernière somme :
$\mathbb{P}(B_n) = (\binom{2n}{n} - 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j+1}\binom{2j}{j}\binom{2(n-1)-2j}{n-1-j})(p(1-p))^n$ donc en utilisant la formule (2) à l'ordre $n-1$:
$\mathbb{P}(B_n) = (\binom{2n}{n} - 2(\frac{1}{2}\binom{2n}{n} - \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1})(p(1-p))^n = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(p(1-p)\right)^n$■
Pour aborder les deux dernières questions on peut remarquer que $x \in [0,1] \to x(1-x)$ est positive et atteint son maximum en $1/2$ et que celui-ci vaut $1/4$.
12) En cumulant Q9 et Q11, il vient (en posant $x = p(1-p) \in [0, 1/4[$ ici) :
$\mathbb{P}(C) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}\binom{2j}{j}x^{j+1}$, ce après changement d'indice.
En vertu de la formule (1), $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4x}$■
13) L'utilisation directe de la formule finale précédente (i.e sans justification supplémentaire) n'est pas possible puisque $x = p(1-p) = 1/4$. L'utilisation de la formule de Stirling montre la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$ et donc de la continuité de la somme de la série entière (voir votre cours) de cette même somme sur le segment $[0, 1/4]$. Il en résulte par passage à la limite ($x \to 1/4$) dans la formule précédente que $\mathbb{P}(C) = 1$.