Feuille d'exercices 13
LIMITES ET CONTINUITÉ

1 - LIMITES

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{2x+3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{x+\ln x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to0} (\sin x)\left(\sin\frac{1}{x}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$

Exercice 2. Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$

(b) $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}-1}{\cos x-1}$

(c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x+1)^3}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(e) $f(x)=x^{\sin x}-1$

(f) $f(x)=\cos\sqrt{x}-1$

(g) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln x}$

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite l en $+\infty$. Montrer que l est finie et que f est la fonction constante égale à l.

Exercice 4. Donner un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de :

(a) $\dfrac{x^2+6x-5}{7x^2-2x-3}$,

(b) $2^{3x}+3^{2x}$,

(c) $x^2 2^x-\dfrac{3^x}{x^3}$,

(d) $\sqrt{x^2+5}$,

(e) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

(f) $e^{2x^2-3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}$,

(g) $x^2\ln(x)^3-x^3\ln(x)^2$,

(h) $e^{\frac{1}{x}}x^5\ln(x)-e^x x^4\ln(x)^2$,

(i) $\dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2\ln(x)}$.

Exercice 5. Soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Soit $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ et $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$.

(b) Soit $l\in\mathbb{R}$. Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ et $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$, alors $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

(c) Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} 5x$, alors $f(x)-5x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $e^{f(x)}\underset{x\to x_0}{\sim} e^{g(x)}$.

Exercice 6. Soit f une fonction polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $d\in\mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,\ldots,a_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$ tels que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_dx^d$. Montrer qu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel f est monotone.

Exercice 7. Soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On suppose que $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et que $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l\in\left(\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\right)$, avec $l\neq1$. Montrer que $\ln f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\ln g(x)$. Est-ce encore vrai pour $l=1$?

Indication : On pourra montrer que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)}-1=\dfrac{\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$.

2 - Continuité en un point

Exercice 8. Prolonger par continuité les fonctions suivantes, lorsque c'est possible :

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{4}{x^2-2x-3}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)}$

(d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sin \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$

(g) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(h) $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(i) $f(x) = \sin(1+x)\ln|1+x|$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 10. Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \arctan(\tan^2(x))$, et montrer qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos(x)$.

Exercice 12. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f est discontinue en tout point rationnel, et continue en tout point irrationnel.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

3 - Continuité sur un intervalle

Exercice 14. Étudier la continuité de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{array} \right.$.

Exercice 15. Soit k un réel strictement positif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Montrer que f est continue.

Exercice 16. Soient $a < b$ des réels et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 17. Soient $a < b$ des réels. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continues. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

Exercice 18. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 19. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 20. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et : $\forall x \in [0,1],\ f \circ f(x) = x$. Déterminer f.

Exercice 21. Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$,

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$,

(d) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(e) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$,

(f) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$.