Devoir à la maison n° 8

Exercice 1. On considère, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution réelle.
   On note u_n cette solution.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < u_n \leq 0$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   Indication : On pourra calculer $f_{n+1}(u_n)$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers -1.
5. Montrer que : $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. En déduire que : $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
6. Montrer ensuite que : $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Indication : On pourra poser $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} + \varepsilon_n$.
7. Déterminer le terme suivant dans le développement de u_n.

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation $z^6 = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   On écrira les solutions sous forme exponentielle.
2. (a) Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.
   (b) En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^6 - i$.
   On écrira les coefficients sous forme algébrique.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.