ESPACES EUCLIDIENS (Spé) : Aspects géométriques
Lycée Bellevue PC* 2023/2024

Si rien n'est précisé, $(E, (.|.)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et de norme associée $||.||$.

1 Orientation d'un espace euclidien

1.1 Matrice de passage entre bases orthonormées de E

Proposition 1 *Soient b une b.o.n de E, b' une base de E :*
b' b.o.n de $E \iff$ la matrice de passage de b à b' appartient à O(n).

Remarque 1 *Si b, b' sont deux b.o.n , alors $P_{b' \to b} = {}^tP_{b \to b'}$, on voit immédiatement l'intérêt pratique d'un tel contexte.*

1.2 Orientation d'un espace euclidien

On considère une base b_0 de E ,orthonormée et privilégiée (choix d'une convention comme droite/gauche) qui va nous servir à orienter l'espace ; si on travaille avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, le choix naturel pour b_0 est évidemment la base canonique.

Définition 1 *b, b.o.n de E, définit la même orientation de E que b_0 (ou directe) si $\det_b(b_0) = 1$.*
Si $\det_b(b_0) = -1$, b définit l'orientation contraire à celle de b_0, elle sera aussi, dans ce cas, dite indirecte (ou rétrograde).
Orienter E par b_0, c'est opérer un tel distingo sur les b.o.n de E.

Exemple 1 *On se donne $b_0 = (i, j)$ alors $(-i, -j)$ est directe et (j, i)indirecte. Avec $b_0 = (i, j, k)$ que dire de (k, i, j)?*

Remarque 2 *Supposons que b_1 soit rétrograde dans l'orientation définie par b_0, alors l'ensemble des bases indirectes est exactement celui des bases définissant la même orientation que b_1.*

2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

P désigne un plan euclidien, orienté par b_0.

2.1 Détermination des matrices orthogonales d'ordre 2

Cette dimension bénéficie de deux miracles, liés à la simplicité de la géométrie euclidienne plane : une description simple des matrices orthogonales et le fait que $SO(2)$ soit un groupe commutatif, caractéristique propre à cette dimension.

Théorème 1 $SO(2) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{def}{=} R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.
$O(2) - SO(2) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Corollaire 1 *$SO(2)$ est un groupe commutatif.*

2.2 Rotations vectorielles du plan euclidien P

Définition 2 *On appelle rotation(vectorielle) du plan euclidien P tout élément de $SO(P)$ qui est, en vertu du corrolaire un groupe commutatif.*

La commutativité de $SO(2)$ donne :

Théorème 2 *Soit r une rotation de P, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : pour toute b, b.o.n de $P, M_b(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On dit que r est la rotation d'angle de mesure θ. Donc dans toute b.o.n directe de P, r est représentée par une même matrice.*

Remarque 3 *Dans ce contexte r^{-1} est la rotation d'angle de mesure $-\theta$ et si r' est la rotation d'angle de mesure $\partial, ror' = r'or$ est la rotation d'angle de mesure $\theta + \partial$.*

Proposition 2 *Si f est la rotation d'angle de mesure θ :*
i)$\forall x \in P$, $< x, f(x) >= \|x\|^2 \cos\theta$,
ii)$\forall x \in P$, $[x, f(x)] = \|x\|^2 \sin\theta$, où $[.,.]$ désigne le déterminant de vecteurs pris dans une b.on directe de P.

Proposition 3 *Soit $r(\theta)$ la rotation vectorielle du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ usuel, orienté par sa base canonique ; on identifie le couple de réels (x, y) au complexe $z = x + iy$. Dès lors $r(\theta) : z \in \mathbb{C} \to e^{i\theta} z$. Ce qui est l'écriture complexe de cette rotation.*

2.3 Détermination des isométries vectorielles de P

Théorème 3 *Les isométries vectorielles de P sont les rotations vectorielles de P et les réflexions de P.*

Remarque 4 *Géométriquement cela signifie que les seules transformations planes qui conservent la distance usuelle et fixant un point sont les rotations planes et les réflexions planes.*

Exercice 1 *Montrer que toute rotation est la composée de deux réflexions.(Fait en classe)*

3 Exercices

On se place dans P, plan euclidien orienté et on désigne par $b = (i, j)$ une b.on drecte de P

Exercice 2 *Soit r la rotation d'angle de mesure θ.*
Quelle est la matrice dans la base (j, i) de r ?

Exercice 3 *Soient r une rotation de P et s une réflexion de P.*
Montrer que $sor = ros \Longleftrightarrow r = id_P$.

Exercice 4 *Prouver la proposition 3.*

Exercice 5 *Quelles sont les matrices orthogonales d'ordre 2 diagonalisables ? Trigonalisables ?*