Inégalité de Cauchy - Schwarz
PC* Lycée Bellevue 2023/2024

$(E, <.,.>)$ est un espace préhilbertien, de norme associée $\|.\|$.

Proposition 1 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
Pour $(x,y) \in E^2, |<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$.
Ou encore : $|<x,y>| \leq \|x\|\,\|y\|$
Par ailleurs l'inégalité précédente est une égalité ssi (x,y) lié.

Nous allons montrer cette proposition.

Preuve 1 *Commençons par vérifier l'inégalité :*
i) $y = 0_E$ alors l'inégalité est validée puisque les deux membres sont nuls ; c'est donc en fait une égalité.
ii) $y \neq 0_E$ alors la preuve classique consiste à exploiter le fait que : $<x+ty, x+ty>$ est positif pour tout réel t. En développant le produit scalaire, il vient : $\forall t \in \mathbb{R}$,
$||y||^2t^2 + 2 <x,y> t + ||x||^2 \geq 0$.
a) Comme $y \neq 0_E$, $||y|| > 0$, on a affaire à un trinôme toujours positif donc ne pouvant posséder 2 racines réelles distinctes. Il en résulte que son discriminant $4(<x,y>^2 - (||x||||y||)^2$ est négatif ; l'inégalité de Cauchy - Schwarz en découle
Le cas d'égalité :
On a déjà vu que c'était le cas pour $y = 0_E$. Supposons désormais $y \neq 0_E$:
i) S'il existe un réel λ tel que $x = \lambda y$, alors $|<x,y>| = |\lambda|||y||^2 = ||x||||y||$; on a donc bien égalité dans l'inégalité de Cauchy - Schwarz.
ii) Supposons qu'il y ait égalité dans cette inégalité alors en reprenant l'argument tenu en ii) pour l'obtention de l'inégalité, c'est que le discriminant utilisé est nul donc que le trinôme
$||y||^2t^2 + 2 <x,y> t + ||x||^2$ *possède une racine double r. Ainsi*
$||y||^2r^2 + 2 <x,y> r + ||x||^2 = <x+ry, x+ry> = 0$ *; le caractère défini du produit scalaire donne alors* $x + ry = 0_E$ *soit (x,y)lié* $\blacksquare$

Remarque 1 *La démonstration de l'inégalité de Cauchy - Schwarz reste (et je l'ai toujours ressentie comme telle) artificielle (quoiqu' élémentaire). Voici une preuve plus géométrique en supposant (x,y) libre . Considérons le plan (euclidien) engendré par les vecteurs x et y ; on peut considérer une base orthonormée (u,v) de ce plan en prenant $u = \frac{1}{||x||}x$. Dès lors $y = <y,u> u + bv$, où b réel non nul puisque x, y non colinéaires donc $||y||^2 > <y,u>^2 = (\frac{1}{||x||} <x,y>)^2$; c'est l'inégalité souhaitée et stricte de surcroît, ce qui permet d'accéder automatiquement au cas d'égalité* $\blacksquare$