Pour Préparer vos colles sur les espaces Euclidiens

Exercice 1 :
Soit $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Reconnaître f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Solution On le répète, il faut avoir présent à l'esprit la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la base canonique est une b.on (éventuellement directe si on le décide).
On observe d'abord que M est symétrique réelle donc que f est auto-adjoint (donc dz déja dans une b.on d'après le théorème spectral).
On peut aussi observer que les colonnes de M forment une b.on donc que $M \in O(3)$.
Votre cours (cf compléménts) vous indique donc que f est une symétrie orthogonale donc son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$ et comme $tr(f) = tr(M) = -1$, il apparaît que $E_{-1}(f)$ est un plan et $E_1(f)$ son orthogonal, une droite vectorielle.
On trouve sans peine pour cette dernière $Vect(1, 3, 2) = D$ donc $f = s_D$ ■

Exercice 2 : (Décomposition polaire)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
1) Etablir que : ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
2) On suppose ici A inversible, prouver que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
3) A l'aide du théorème spectral matriciel, montrer qu'il existe une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tMM$.
4) Vérifier alors que MS^{-1} est une matrice orthogonale.
5) En déduire que M peut s'écrire comme le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive.

Solution On pose $B = {}^tAA$.
1) En transposant on voit immédiatemment que $M \in S_n(\mathbb{R})$ et de plus pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXBX = ||AX||^2 \geq 0$ donc effectivement $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
2) Comme A inversible si $X \neq 0_{n,1}$ alors ${}^tXBX = ||AX||^2 > 0$ donc effectivement $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3) Par 2) et le théorème spectral il existe des réels strictement positifs $t_1, ..., t_n$ et $\Omega \in O(n)$ tels que :
${}^tMM = \Omega diag(t_1, ..., t_n)^t\Omega$.
Ainsi en posant $S = \Omega diag(\sqrt{t_1}, ..., \sqrt{t_n})^t\Omega$, nous avons $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (car symétrique en transposant et de spectre fait de $\sqrt{t_1}, ..., \sqrt{t_n}$ donc de réels strictement positifs) et $S^2 = \Omega diag(t_1, ..., t_n)^t\Omega = {}^tMM$.
4) Par propriété de la transposition : ${}^tMS^{-1}MS^{-1} = S^{-1t}MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ donc effectivement $MS_i^{-1}nO(n)$.
5) Au vu de ce qui précède : $M = MS^{-1}S$ ■