Devoir à la maison n° 9 bis

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On souhaite montrer le *théorème de d'Alembert-Gauss*, à savoir que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

1. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |P(z)| \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que $f(\mathbb{C})$ est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée.
   On note alors m la borne inférieure de $f(\mathbb{C})$: $m = \inf_{z \in \mathbb{C}} f(z)$.
   (b) Montrer que $f(z) \underset{|z| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En déduire que : $\exists A > 0,\ m = \inf_{|z| \leq A} f(z)$.
   (c) En déduire que m est atteint, c'est-à-dire : $\exists z_0 \in \mathbb{C},\ f(z_0) = m$.

   Il suffit à présent de montrer que $P(z_0) = 0$. On raisonne par l'absurde :

2. Supposons que $P(z_0) \neq 0$. On note $Q(X) = \dfrac{P(z_0 + X)}{P(z_0)} = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.
   (a) Montrer que $b_n \neq 0$, que $Q(0) = 1$, et que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |Q(z)| \geq 1$.
   (b) On note $j = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid b_k \neq 0\}$. Justifier que $-\dfrac{1}{b_j}$ admet une racine $j^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{C}$.
   On note c une telle racine, puis $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & Q(ct) \end{array} \right.$.
   (c) Montrer que $g(t) = 1 - t^j + \underset{t \to 0}{o}(t^j)$.
   (d) En déduire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|g(t)| < 1$. Conclure.