Devoir à la maison n° 9

Exercice 1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n le polynôme (dont on admet l'existence et l'unicité) tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. Déterminer $T_0,\ T_1,\ T_2$ et T_3.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de T_n.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples appartenant à $]-1,1[$.
4. En utilisant la formule de Moivre, déterminer T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On souhaite déterminer l'ensemble E des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right).$$

1. On suppose qu'il existe $f \in E$.
   (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(nx)$.
      i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2u_1$.
      ii. En calculant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$ de deux façons différentes, montrer que :
      $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n^2 f(x).$$
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = n^2 f(x)$.
   (d) En déduire que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx) = r^2 f(x)$.
   (e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
      i. Justifier qu'il existe une suite (α_n) de rationnels qui converge vers α.
      ii. En déduire que : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha x) = \alpha^2 f(x)$.
   (f) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda t^2$.
2. Conclure.