Feuille d'exercices 14
DÉRIVABILITÉ

1 - DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, (b) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

Exercice 2. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité, et la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$,
(b) $g : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$,
(c) $h : x \mapsto \arccos\sqrt{1-x^2}$,
(d) $i : x \mapsto \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$,
(e) $j : x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x$,
(f) $k : x \mapsto \ln|\tan x|$,
(g) $l : x \mapsto \arcsin(1-x^2)$,
(h) $m : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,
(i) $n : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 3. Étudier le prolongement par continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto x^x$,
(b) $g : x \mapsto x\ln|x|$,
(c) $i : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$,
(d) $j : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

Exercice 4. Soit $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

(a) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser.

(b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $J \setminus \{0\}$, puis en 0.

2 - PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVABLES

Exercice 5. Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

(a) $\sqrt{10001} \simeq 100$, (b) $\dfrac{1}{0,999^2} \simeq 1$, (c) $\cos 1 \simeq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe C^1. Montrer que f' est périodique, et en déduire que f est lipschitzienne.

Exercice 7. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Exercice 8. Soient $a, b > 0$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente à Γ_f en c passe par l'origine.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant la même limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et $-\infty$. En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 11. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 12. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |e^{ib} - e^{ia}| \leq |b-a|$.

3 - Fonctions de classe C^n

Exercice 13. Calculer les dérivées successives de :

(a) $f : x \mapsto (x^2+1)e^{3x}$,

(b) $g : x \mapsto \cos^3 x$,

(c) $h : x \mapsto e^x \sin x$,

(d) $i : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$,

(e) $j : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$,

(f) $k : x \mapsto \ln(2-3x)$.

Exercice 14. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

soit de classe C^2. Est-elle alors de classe C^3 ?

Exercice 15. Déterminer les classes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$,

(b) $g(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$,

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,

(d) $i(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0,$$

alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 18. Soit f une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

4 - Fonctions convexes

Exercice 19. Montrer que la fonction $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1,+\infty[$.
En déduire que : $\forall a,b > 1,\ \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Exercice 20. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0,\ \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 21. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que : $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,\ \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 22. Soient $p,q \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall x,y > 0,\ xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
En déduire que : $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,\ \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.