Devoir à la maison n° 8
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Pour $n = 0$: $f_0 : x \mapsto x^3$ s'annule une et une seule fois en $x = 0$.
Pour $n \geq 1$: la fonction f_n est usuellement dérivable, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = 3x^2 + n > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est injective sur $\mathbb{R}$. De plus f_n est continue et croissante sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $f_n(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= \mathbb{R}$. Donc f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $f_n(-1) = -1 - n + n = -1 < 0$ et $f_n(0) = 0 + 0 + n = n \geq 0$ donc, d'après l'étude de la question 1 : $-1 \leq u_n \leq 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$f_{n+1}(u_n) = u_n^3 + (n+1)u_n + (n+1) = f_n(u_n) + u_n + 1 = u_n + 1 \geq 0,$$
donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par -1, donc converge vers une limite $l \geq -1$. De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^3 + nu_n + n = 0$, donc $n = -\dfrac{u_n^3}{u_n + 1}$. Si $l \neq -1$, le terme de droite converge vers $-\dfrac{l^3}{l+1}$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est absurde. Donc $l = -1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\dfrac{u_n + 1}{\frac{1}{n}} = nu_n + n = -u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -(-1)^3 = 1$. Donc $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Cela revient à dire que $u_n + 1 = \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Alors :
$$u_n^3 = \left(-1 + \left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right)\right)^3 = -1 + 3\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{3}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$
donc :
$$0 = u_n^3 + nu_n + n = \frac{3}{n} + n\varepsilon_n + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$
d'où $\varepsilon_n = -\dfrac{3}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où la formule voulue.
7. On procède de même : soit $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Alors : $0 = u_n^3 + nu_n + n = -\dfrac{12}{n^2} + n\varepsilon_n + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où $\varepsilon_n = \dfrac{12}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, d'où :
$$u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 2.

1. On a : $z^6 = i \Leftrightarrow z^6 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{12}}\omega^k,\ k \in [\![0,5]\!]$, en notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{6}}$.
2. (a) On a :
   - $X^6 - i - X^4(X^2+i) = -iX^4 - i$,
   - $(-iX^4 - i) - (-iX^2)(X^2+i) = -X^2 - i$,
   - $(-X^2 - i) - (-1)(X^2+i) = 0$,

   donc $X^6 - i = (X^4 - iX^2 - 1)(X^2+i) + 0_{\mathbb{C}[X]}$.

   (b) • Les racines de X^2+i sont les solutions complexes de l'équation $z^2+i=0$. Or :

$$z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right),$$

donc $X^2 + i = \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

• Le polynôme $X^4 - iX^2 - 1$ a pour discriminant $(-i)^2 - 4\times(-1) = 3$, donc pour racines $\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$. Notons $\delta = x+iy$, alors :

$$\delta^2 = \frac{i+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy & = & \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \delta = \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right),$$

et de même : $\delta^2 = \frac{i+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \delta = \pm\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} X^4 - iX^2 - 1 & = & \left(X - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \\ & & \left(X - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right). \end{array}$$

Finalement :

$$\begin{array}{rcl} X^6 - i & = & \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ & & \left(X - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \\ & & \left(X - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right). \end{array}$$

3. D'après la question 1, les racines de $X^6 - i$ sont les $e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{6}\right)}$. Les arguments de ces racines dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$, donc, par identification : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.