▶ Exercice 1

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln(9 - 3x)$, $I =]-\infty; 3[$
3. $f(x) = \ln((x+1)(5-x))$, $I =]-1; 5[$

▶ Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. étude du signe de la fonction f
   (a) étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   (c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.
   (d) étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

▶ Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) étudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.