Correction DM 9.

9

Partie 1.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$

1°) $\varphi(x) = e^x + x + 1$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$

donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \end{array}\right\}$ par opération sur les limites.

Ainsi, en résumé :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+	
Variation de φ	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2°) Sur $]-\infty, +\infty[$

- φ est continue car dérivable
- φ est strictement croissante
- $0 \in]-\infty ; +\infty[$ (intervalle image)

D'après le théorème de la bijection, il existe une unique valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$-1,28 < \alpha < -1,27$

3°) Par croissance de φ, on déduit :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de φ		$-$	0	$+$	

Partie 2.

On considère la fonction f définie sur $[-3; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 3$, $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x+1)^2}$ En déduire le sens de variation de f sur $[-3; +\infty[$.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser son tableau de variation sur $[-3; +\infty[$.

PII : 1°) f dérivable sur $\mathbb{R}$

donc sur $[-3 ; +\infty[$

$$\forall x \geqslant -3, \quad f'(x) = \frac{(e^x+1) \times (xe^x + e^x) - xe^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x)^2 + xe^x + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x+1)^2}$$

or, $\frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	↘		$f(\alpha)$		↗

2°) α est défini par $\varphi(\alpha)=0 \iff e^{\alpha}+\alpha+1=0$

$\iff e^{\alpha}=-\alpha-1$ et $e^{\alpha}+1=-\alpha$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=\frac{\cancel{\alpha}\times(-\alpha-1)}{-\cancel{\alpha}}=\alpha+1$$

3°) en -3, f est continue car dérivable donc $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)=\frac{-3e^{-3}}{e^{-3}+1}$

$=\frac{-3}{e^{3}+1}$

$\simeq -0{,}14$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{x}}{e^{x}+1}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$

Or $\frac{xe^{x}}{e^{x}+1}=\frac{\cancel{e^{x}}\times x}{\cancel{e^{x}}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\frac{x}{1+\frac{1}{e^{x}}}$ $x \to +\infty$; $1+\frac{1}{e^{x}} \to 1$

par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

4.

x	-3		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-0{,}14$	$\searrow$	$\simeq -0{,}27$	$\nearrow$	$+\infty$