Corrigé du TD 25 (Probabilités 2)

Exercice 1 :
Trois enfants A, B et C jouent à la balle :
- A envoie la balle à B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$;
- B envoie la balle à A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$;
- C envoie toujours la balle à B.
Pour tout entier naturel n, on désigne par A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : " A (resp. B, C) est en possession de la balle à l'issue du n-ième lancer ".

Dans ce contexte on pose : $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$ puis $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Prouver que, pour tout n, $X_{n+1} = MX_n$, où on a posé $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser M.
3) Etablir que la suite (X_n) converge vers une limite L indépendante des conditions initiales.
(On trouvera $L = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$).

Solution : 1) Les probabilités totales avec comme système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), ce pour tout n, conduisent (établi par vous mêmes en classe) à cette égalité matricielle$\blacksquare$
2) On calcule le polynôme caractéristique de M en ajoutant à la première ligne les deux autres, ce qui permet une factorisation par $\lambda - 1$; dès lors en soustrayant aux deux dernières colonnes la première puis en développant suivant la première ligne, il vient $\chi_M = (\lambda - 1)(\lambda + 1/4)(\lambda + 3/4)$(On voit bien que la somme des vp trouvées correspond à la trace de M).
La matrice M est dz puisque χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. Chaque espace propre est donc une droite vectorielle.
Après calculs onn trouve : $E_1(M) = Vect\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$), $E_{-1/4}(M) = Vect\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$) et $E_{-3/4}(M) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$).
Dès lors en posant $P = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 1 \\ 16 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = diag(1, -1/4, -3/4)$, il vient $M = PDP^{-1}$$\blacksquare$
3) Une récurrence immédiate donne : $\forall n, X_n = M^n X_0$. Donc, avec la question précédente et dans le même contexte, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$. Par propriétés des suites de matrices, la convergence de la suite (X_n) équivaut à celle de la suite (D^n). Cette dernière s'obtient facilement puisque les suites $((-1/4)^n)$ et $((-3/4)^n)$ convergent vers 0.
En conclusion $X_n \to Pdiag(1, 0, 0)P^{-1}X_0 = L$ si $n \to \infty$.
Déterminons maintenant L.
En partant de $\forall n, X_{n+1} = MX_n$ et en faisant tendre n vers ∞, nous obtenons $L = ML$ i.e $L \in E_1(M)$ donc il existe un réel t tel que $L = t\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$.
La convergence de (X_n) vers L entraine $\mathbb{P}(A_n) \to 12t$, $\mathbb{P}(B_n) \to 16t$ et $\mathbb{P}(C_n) \to 7t$. Mais $\forall n, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$ soit, par passage à la limite dans cette égalité : $35t = 1$ et l'expression de L en découle$\blacksquare$

Exercice 2 : (Les probabilités au secours de Persée)
Persée est à la recherche de son épouse Andromède qu'un dieu malveillant a enfermée dans une caverne.
Malheureusement, il y a trois cavernes identiques : dans l'une se trouve Andromède mais dans chacune des deux autres se trouve une gorgone au regard pétrifiant.
Zeus intervient : "Mon fils, je sais dans quelle caverne Andromède se trouve mais je ne peux pas te le

dire. Toutefois je peux t'aider. Une fois que tu auras choisi une caverne, je peux t'indiquer parmi les deux cavernes restantes, une caverne où il y a une gorgone et je te conseille alors de modifier ton choix initial."
Persée lui répond : "Ô père cruel, que je change ou non mon choix, il y a toujours une chance sur deux que je sois transformé en pierre !"
Zeus : "Persée, la mathématique est meilleure conseillère que la colère !"
Quelle est la probabilité que Persée trouve Andromède si Persée ne modifie pas son choix ?
Quelle est la probabilité que Persée trouve Andromède si Persée modifie son choix ?
Que lui conseillez-vous ?
Solution : 1) Si Persée ne modifie pas son choix, il a une chance sur 3 de trouver son épouse■
2) S'il écoute son divin papa, la probabilité qu'il ne trouve pas Andromède se résume à celle qu'il avait de la trouver du premier coup donc 1/3. Donc, en passant à l'événement contraire, la probabilité de trouver Andromède en suivant les conseils de Zeus est de 2/3■
A traiter en 1 heure au maximum