TD 24 : Probabilités I (Corrigé)

Le cadre implicite (si rien n'est précisé) des exercices théoriques : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1 *(Probabilités composées)*
Soit une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une sans remise 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que les deux premières tirées soient blanches et la troisième noire ? (On notera B_i l'événement " on tire une boule blanche au i-ième tirage et on procédera de même pour les noires).

2 *(Probabilités totales)*
Considérons le jeu suivant : on dispose d'une urne contenant au début une boule blanche et on joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce parfaite. Chaque fois que l'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne et la première fois que pile est obtenu, on tire (au hasard !!!) une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir (dans ce contexte) une boule blanche? On posera B l'événement " obtenir une boule blanche" et, pour $n \geq 1$ A_n l'événement " pile apparaît pour la première fois au n-ième coup".

3 *(Exemple de Bernstein)*
On jette deux fois de suite une pièce équilibrée. Soient les événementA : " obtenir face au premier lancer ", B : " obtenir face au second lancer " et C : " obtenir le même résultat aux deux jets". Ces événements sont-ils deux à deux indépendants? Mutuellement indépendants?

4 *(Probabilité de Zipf (Fonction Zéta, Centrale écrit))*
Soient $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.
1) En utilisant le cours, montrer que l'on peut définir une probabilité P_s sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant : $P_s(\{n\}) = \dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)}$, ce pour tout entier naturel non nul n.
On se place désormais dans l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, P(\mathbb{N}^*), P_s)$.
2) Déterminer $P_s(A_m)$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et où on a posé $A_m = m\mathbb{N}^*$.
3) Les événements A_2 et A_3 sont ils indépendants? Même question pour A_4 et A_6?
On admet que si des entiers naturels sont premiers entr'eux alors tout multiple de tous ces entiers est divisible par leur produit.
On considère alors la suite $p_1 < p_2 < ....$ des nombres premiers et pour $n \geq 1$, on pose C_n comme l'ensemble des entiers naturels qui ne sont divisibles par aucun des $p_i, 1 \leq i \leq n$.
4) Prouver l'indépendance mutuelle de la suite d'événements $(\overline{A_{p_1}}, ..., \overline{A_{p_n}}$.
5) En déduire $P_s(C_n)$.
6) Déterminer $\bigcap_{n\geq 1} C_n$.
7) En déduire que la suite $(\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1-p_i^{-s}})_n$ converge vers $\zeta(s)$. (Superbe résultat d'Euler).

Solution :1) Il suffit, pour cela, de montrer que la STP $\sum_{n\geq 1} P_s(\{n\})$ converge et que sa somme vaut 1. On reconnaît en le terme général de cette série un multiple du terme général d'une série de Riemann convergente ($s > 1$), le premier point est donc vérifié et $\sum_{n=1}^{\infty} P_s(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}) = \dfrac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = 1\blacksquare$
2) On décrit A_m comme réunion d'événements élémentaires. Par définition $A_m = \{nm, n \in \mathbb{N}^*\} = \bigcup_{n\geq 1}\{nm\}$, ainsi par σ-additivé (on a bien affaire à une réunion dénombrable d'une suite d'événements, à savoir les $\{nm\}$, deux à deux incompatibles, nous obtenons $P_s(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} P_s(\{nm\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(nm)^{-s}}{\zeta(s)} = \dfrac{m^{-s}}{\zeta(s)}(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}) =$

$m^{-s}\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = \dfrac{1}{m^s}$■

3) On a assez vite que $A_2 \cap A_3 = A_6$ (les nombres divisibles par 2 et 3 sont les multiples de 6) ainsi, grâce à Q2, $P_s(A_2 \cap A_3) = P_s(A_6) = 6^{-s} = 2^{-s}3^{-s} = P_s(A_2)P_s(A_3)$ donc les événements A_2 et A_3 sont bien indépendants.

En revanche $A_2 \cap A_4 = A_4$ implique $P_s(A_2 \cap A_4) = 4^{-s} \neq 2^{-s}4^{-s} = P_s(A_2)P_s(A_4)$ soit que A_2 et A_4 ne sont pas indépendants■

4) Par propriété il nous suffit de montrer que $A_{p_1}, \ldots A_{p_n}$ sont mutuellement indépendants. Pour cela considérons $J \in [|1, n|]$ et vérifions que $P_s(\bigcap\limits_{i\in J} A_{p_i}) = \prod\limits_{i\in J} P_s(A_{p_i})$. Compte tenu de Q3, ce produit vaut $\prod\limits_{i\in J} p_i^{-s} = (\prod\limits_{i\in J} p_i)^{-s} = P_s(A_m)$, où on a posé $m = \prod\limits_{i\in J} p_i$.

Nous allons donc montrer que $\bigcap\limits_{i\in J} A_{p_i} = A_m$ et l'indépendance sera établie.

Pour cela on remarque que n appartient à $\bigcap\limits_{i\in J} A_{p_i}$ signifie (équivaut) qu'il est divisible par tous les p_i avec i décrivant J ou qu'il est multiple de tous ces nombres premiers donc, avec ce que l'énoncé nous demande d'admettre, que le produit de ces nombres premiers divise n soit que m divise n ou que $n \in A_m$. On dispose donc de l'inclusion $\bigcap\limits_{i\in J} A_{p_i} \subset A_m$. L'autre est immédiate puisque m est divisible par chaque p_i ($i \in J$), nous avons aussi $A_m \subset A_{p_i}$ d'où l'inclusion manquante et l'égalité■

5) Par définition $C_n = \bigcap\limits_{i}^{n} \overline{A_{p_i}}$, ainsi grâce à la mutuelle indépendance des $\overline{A_{p_i}}$, il vient $P_s(C_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} P_s(\overline{A_{p_i}})$ soit avec Q2 $P_s(C_n) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - \dfrac{1}{p_i^s})$■

6) L'intersection de tous les C_n est constituée des entiers naturels non nuls divisibles par aucun nombre premier, seul 1 possède cette caractéristique (Euclide a montré que tout nombre entier > 1 est divisible par un nombre premier par une récurrence d'une limpidité légendaire) donc $\bigcap\limits_{n\geq 1} C_n = \{1\}$■

7) On constate que la suite (C_n) est décroissante pour l'inclusion (en effet $C_{n+1} = C_n \cap A_{p_{n+1}}$, ce pour tout $n \geq 1$) donc, par théorème de continuité décroissante, nous pouvons affirmer que $P_s(C_n) \underset{n\to\infty}{\to} P_s(\bigcap\limits_{n\geq 1} C_n)$.

Avec Q5 et Q6 ceci donne $\prod\limits_{i=1}^{n}(1 - \dfrac{1}{p_i^s}) \underset{n\to\infty}{\to} P_s(\{1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$. En passant aux inverses, on trouve bien la formule d'Euler■

5 *(ORAL CCINP)*
Soient A,B et C trois événements de même probabilité $p \in]0, 1[$ pour lesquels on sait que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \leq \dfrac{2}{3}$.

6 *(Défaut d'indépendance)*
A,B étant des événements, on se propose de montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \dfrac{1}{4}$.

1) Prouver que $x(1 - x) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

2) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A \cap B))^2 \leq \dfrac{1}{4}$

3) En appliquant l'inégalité précédente aux événements A et $\overline{B}$, établir l'inégalité en vue.

Solution : 1) Cette inégalité équivaut à $(x - 1/2)^2 \geq 0$■

2) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc (croissance d'une probabilité) $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$. Il en résulte bien que :$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A \cap B))^2$. Q1 donne la majoration par $\dfrac{1}{4}$■

3) L'inégalité précédente donne aussi (valable pour tous les événements) $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) \leq \dfrac{1}{4}$ ou $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \dfrac{1}{4}$. Mais $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \backslash (A \cap \overline{B})) = \mathbb{P}(A \cap B)$ donc nous avons prouvé que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \dfrac{1}{4}$, ce qui, associé au résultat de Q2, fournit l'inégalité souhaitée■

7 *(Inégalité de Bonferroni)*
On considère des événements $A_1, .., A_n$ *et* A *tels que* $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset A$. *Prouver que* $\mathbb{P}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$.

Solution : Même méthode que celle utilisée dans l'exercice 5.
$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset A \Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ (par passage aux événements contraires); la croissance d'une probabilité et l'inégalité de Boole donnent alors : $\mathbb{P}(\overline{A}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k})$ ou $1_{\mathbb{P}}(A) \leq n - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \iff \mathbb{P}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$■

8 *On se place dans l'espace probabilisé* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$.
1) Prouver que la suite $(\mathbb{P}(\{n\}))$ *converge vers 0.*
2) On suppose que la suite précédente est décroissante. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n\}) \geq \frac{1}{2}$.

Solution :1) On sait que la série des germes de probabilité $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\{n\})$ converge donc son terme général tend vers 0■
2) Par ailleurs nous avons que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$; cette égalité peut aussi s'écrire (sommation par paquets pour une famille (ici suite) de réels positifs) : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n\}) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n+1\}) = 1$.
La décroissance de la suite $(\mathbb{P}(\{n\}))$ assure que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{2n\}) \geq \mathbb{P}(\{2n+1\})$ d'où :
$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n\}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n+1\})$ et finalement $1 \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n\})$■

9 *(Mines écrit partiel)*
Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 *à* 5*, qui communiquent par des tubes selon le schéma donné en classe.*
Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$.
On admet que, si le rat se trouve à l'instant k $(k \in \mathbb{N})$ *dans la salle numéro* i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$*, alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle* i *et se trouvera donc, à l'instant* $k+1$*, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle* i.
On considère, pour tout k *entier naturel et tout* $1 \leq i \leq 5$*, les événements* S_k^i *: " le rat à l'instant* k *se trouve en salle* i*".*
Pour tout $k \in \mathbb{N}$*, on introduit la matrice-colonne :*
$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k^1) \\ \\ \mathbb{P}(S_k^5) \end{pmatrix}.$$

1. *Expliciter la matrice carrée* $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ *telle que* $X_{k+1} = BX_k$ *pour tout* k *entier naturel.*
2. *En observant les colonnes de la matrice* B*, montrer que le réel* 1 *est valeur propre de* B *et expliciter un vecteur propre associé.*

   On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$.

3. *Montrer qu'alors* $X_k = X_0$*, pour tout* k.