TD 30 Intégrabilité

Exercice 1 : (Intégrabilité)
1) Etudier l'intégrabilité sur $]0,1[$ de $t \to (-\ln t)^{-1/2}$.
2) En distinguant les cas $\alpha < 1, \alpha > 1, \alpha = 1$, étudier l'intégrabilité de $[2,+\infty[$ de $t \to \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

....

....

Exercice 2 : ★(Centrale : Lemme de Cantor)
Soient $I = [a,b]$ et $(a_n), (b_n)$ deux suites numériques telles que: $a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0$ pour tout $x \in I$.
a) Soit un entier naturel n ,montrer qu'il existe un réel θ_n tel que :
$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \theta_n)$pour tout x de I.
b) Calculer $I_n = \displaystyle\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2 dx$.
En déduire que pour n assez grand : $I_n \geq \dfrac{(b-a)}{4}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.
c) Conclure que (a_n) et (b_n) convergent vers 0.(Lemme de Cantor)

....

....

Exercice 3 : (Mines : Intégration terme à terme)
Prouver que, pour tout réel a : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{a^2 + n^2}$.
NB : i) Penser à écrire, pour $x > 0$, $\dfrac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$ et à utiliser le DSE de $\dfrac{1}{1-u}$.ii) On pourra par ailleurs utiliser l'inégalité $|\sin u| \leq u$, pour $u \geq 0$.

....

....

Exercice 4 : (Intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$)

Soit $f : x \to \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.
a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Limites en $+\infty$ de f et de f'?
c) Exprimer f' sans signe $\displaystyle\int$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) Donner l'intégrale de Dirichlet en fonction de $f(0)$ et trouver sa valeur.

....

....

Exercice 5 : (CCINP)

Étude d'une suite

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}} dt$ converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + \cdots + t^n} dt$.

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l que l'on déterminera.

   On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

Étude de la série de terme général $u_n - l$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout entier naturel non nul p, et pour tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)t^{p(n+1)}$.

   Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geq 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$, et déterminer sa somme.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 g_p(t)dt$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - l = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}.$$

4. Pour tout p entier naturel non nul, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)}$.

   Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geq 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = l + \frac{\pi^2}{6n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

....

....

Exercice 6 : (CCINP MP)

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx \qquad\qquad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

9. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

10. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$

    On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

11. <u>1ère tentative</u>

    Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

    La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

12. <u>2ème tentative</u>

    Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

    A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$$

    En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad cos(\alpha x) = \frac{sin(\pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\, cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt$$

15. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

16. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

17. Démontrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

18. Déterminer $\underset{x \to +\infty}{lim} f_\alpha(x)$.

19. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

20. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

21. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

22. En déduire que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$$

23. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

24. En déduire (encore une fois) la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 7 : (CCINP MP : Intégration terme à terme ?)
Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.
a) Etablir que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$,ce pour tout $n \geq 1$. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$?
b) Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et que sa somme S est intégrable sur cet intervalle.
c) En déduire, sans calculs, la nature de la série $\displaystyle\sum \left(\int_0^\infty |f_n(x)|\, dx \right)$.

Exercice 8 : (CCINP MP :Intégrale à paramètre)
Pour $x \geq 0$, soit $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty xe^{-xt}dt$.
a) Calculer $G(x)$ pour $x \geq 0$.
b) G est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?
c) Que peut-on en conclure sur l'hypothèse de domination?

Exercice 9 : (Intégrale de Frullani)
Exprimer, suivant $a > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x} dx$ en dérivant / a cette intégrale.

Exercice 10 : ★(Théorème de division preuve de René Thom)
On se donne $f \in C^m(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ avec $m \geq 1$.
En étudiant $x \to \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$, montrer que $g : x \to \dfrac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction C^{m-1} sur $\mathbb{R}_+$.