Corrigé du TD 29 : Espaces euclidiens (Deuxième année)

Si rien n'est précisé $(E, (.|.)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et de norme associée $||.||$ dont $F, G, ..$ sont des sev.

Exercice 1 : (Sur le spectre complexe d'une matrice orthogonale)
En s'inspirant du cours et en utilisant la conjugaison matricielle (Si $A = (a_{i,j})$ alors $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})$ et cette conjugaison possède vis à vis des opérations matricielles des propriétés analogues à la conjugaison usuelle), prouver que : $A \in O(n) \Longrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$.
Solution : Considérons λ une valeur propre complexe de A à laquelle nous associons $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, une colonne propre $X \neq 0_{n,1}$.
On a donc $AX = X$ que nous conjugons et transposons soit ${}^t\overline{X}{}^t\overline{A} = = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}$ ou (parce qu'une matrice orthogonale est à coefficients réels) ${}^t\overline{X}{}^tA = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}$ puis, en utilisant l'égalité dont nous sommes partis :
${}^t\overline{X}{}^tAAX = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}\lambda X \Longleftrightarrow {}^tXX = |\lambda|^2({}^tXX)$, ce grâce à ${}^tAA = I_n$.
En posant ${}^tX = (x_1, ..., x_n)$, on obtient ${}^tXX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = ||X||_2^2 > 0$(car X n'est pas la colonne nulle) et l'égalité $||X||_2^2(1 - |\lambda|^2) = 0$ d'où $\lambda \in \mathbb{U}$■

....
....

Exercice 2 : (Projecteurs orthogonaux : classique) On note p_F la projection orthogonale de E sur F; on rappelle que $E = F \oplus F^{\perp}$, où $F = Im(p_F) = Ker(p_F - idE)$ et $F^{\perp} = Ker(p_F)$.
1) Etablir que $\forall x \in E, ||p_F(x)|| \leq ||x||$.
2) On se donne p un projecteur de E tel que $Im(p) = G$ et $Ker(p) = H$ ne soient pas orthogonaux. Prouver qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $||p(x_0)|| > ||x_0||$.
3) En déduire qu'un projecteur non nul q de E est orthogonal si et seulement si $\sup\limits_{x \neq 0_E}(\dfrac{||q(x)||}{||x||}) = 1$.
Solution : 2) On choisit $u \in Ker(p)$ et $v \in Im(p)$ tels que $(u|v) = a \neq 0$. On cherche alors $x_0 = tv + u$, où t est un réel à déterminer pour satisfaire $||p(x_0)|| > ||x_0||$.
Or $||p(x_0)||^2 - ||x_0||^2 = -2at - ||u||^2$, en prenant $t = -\dfrac{||u||^2}{a}$, on a bien ce que l'on veut puisque $u \neq 0_E$■
3) On note M l'ensemble des $\dfrac{||q(x)||}{||x||}$ lorsque x décrit $E \setminus \{0_E\}$.
Si q est un projecteur orthogonal par Q1, M est majoré par 1 et puisque cette partie de $\mathbb{R}$ est non vide (par hypothèse E est au moins de dimension 1), M possède bien une borne supérieure, nécessairement inférieure ou égale à 1. Mais pour tout $y \in Imq$, on a $q(y) = y$ donc en le prenant $\neq 0_E$, on voit que $1 \in M$. Par double inégalité $\sup(M) = 1$.
Inversement si $\sup(M) = 1$ le contexte évoqué en Q2 n'a pas lieu d'être donc le noyau et l'image de q sont orthogonaux et q est un projecteur orthogonal■

....
....

Exercice 3 :
On suppose que $F \subset G^{\perp}$ (ce qui se lit F et G sont orthogonaux).
Vérifier que $s_F o s_G = s_{(F+G)^{\perp}}$. Réciproque?
Solution : Soit $x \in E$ que l'on écrit $x = u + v$, où $u \in G$ et $v \in G^{\perp}$. Dès lors $s_F o s_G(x) = s_F(u) - s_F(v) = -u - s_F(v)$ (car $u \in G \subset F^{\perp}$).
On pose alors $v = t + w$, où $t \in F$ et $w \in F^{\perp}$ et on obtient : $s_F o s_G(x) = -u - t + w$.
On remarque alors que $t + u \in F + G$ et que $w = v - t$ est dans l'intersection des orthogonaux de F et G donc dans $(F + G)^{\perp}$ autrement dit puisque nous avons $x = t + u + w$ (qui est au vu de ce qui précède la décomposition de x suivant $F + G$ et $(F + G)^{\perp}$, il vient $s_{(F+G)^{\perp}}(x) = -t - u + w = s_F o s_G(x)$■
Inversement supposons que $s_F o s_G = s_{(F+G)^{\perp}}$. Alors, en particulier $s_F o s_G$ est une symétrie donc sa propre inverse soit $s_F o s_G = s_G o s_F$ (puisque s_F et s_G sont aussi des symétries); ce qui montre que s_F et s_G commutent.

Soit $x \in F$, montrons que $x \in G^{\perp}$.
De $s_G o s_F(x) = s_{(F+G)^{\perp}}(x)$, on tire $s_G(x) = -x$. Ceci prouve, par définition d'une symétrie orthogonale, que $x \in G^{\perp}$■

....

....

Exercice 4 : (Un peu de géométrie)
E est un plan euclidien orienté par $b = (i, j)$.
On note $Z = O(2) \cap M_2(\mathbb{Z})$ et G l'ensemble des endomorphismes de E dont les matrices dans b sont les éléments de Z.
1) Déterminer tous les éléments de Z.
2) Caractériser géométriquement tous les éléments de G; établir que (G, o) est un groupe non commutatif.
Soit $A = \{(1, 1); (-1, 1); (-1, -1); (1, -1)\}$.
3) Vérifier que $\forall g \in G, g(A) \subset A$.
4) Soit $h \in L(E)$ tel que $h(A) \subset A$, montrer que $h \in G$.
Solution : 1) Les colonnes des éléments de Z étant unitaires et entières, l'une d'entre elles est nulle et l'autre vaut ± 1; par ailleurs l'orthogonalité des deux colonnes implique que les composantes nulles soient sur deux lignes différentes. On met ainsi en évidence 8 matrices :
$\pm I_2$, $\pm diag(1, -1)$, $\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$■
2) Il y a 4 rotations d'angle 0, π et $\pm \dfrac{\pi}{2}$ (représentées par les types I et IV du 1)).
Les autres sont les réflexions d'axes $Vect(i)$, $Vect(j)$ et $Vect(i \pm j)$.
Il suffit de montrer que $(Z, .)$ est un groupe non commutatif. Ce qui résulte du fait que le produit de deux matrices orthogonales l'est encore et qu'il en va de même pour les matrices à coefficients entiers. Z est stable par passage à l'inverse puisque inverse = transposée.
Enfin $diag(1, -1) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times diag(1, -1)$■
3) Les éléments de A sont exactement les éléments de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières de norme $\sqrt{2}$, cet ensemble, de par la définition de G, est bien stable par tout élément de G■
4) Considérons un tel h que nous représentons dans b par sa matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Des relations $a \pm b = \pm 1$ (ce qui donne 4 relations malgré les apparences) on tire $a = \pm 1$ et $b = 0$ ou $a = 0$ et $= \pm 1$ et même chose pour c et d; ce qui donne 16 possibilités. Ce qui montre que cette assertion est fausse; elle est néanmoins vraie si $h \in GL(E)$■

....

....

Exercice 5 : (Rotation dans l'espace)
Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M.
1) Prouver que $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ ($\mathbb{R}^3$ étant bien sûr muni de sa structure euclidienne canonique; cet espace étant orienté par sa base canonique).
2) Déterminer les éléments propres réels de f.
On note P le plan d'équation : $x + y + z = 0$.
3) Vérifier que P est stable par f; g désigne alors l'endomorphisme de P induit par f. Soit $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.
4) Déterminer (v, w), une b.on de P, de sorte que (u, v, w) soit directe.
5) Reconnaître g.
6) Visualiser géométriquement l'effet de f sur un vecteur en décomposant ce dernier suivant la somme directe orthogonale $Vect(u) \oplus P$.
Solution : 1) Les colonnes constituent à l'évidence une b.on pour le PS standard de $\mathbb{R}^3$ et le déterminant de M vaut 1. Donc $f \in SO(\mathbb{R}^3)$■
2) On voit sans peine que $M^3 = I_3$ donc que $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de M (c'est aussi son polynôme caractéristique) et le spectre réel de M est donc inclus dans l'ensemble des racines réelles de ce polynôme. Donc 1 est la seule vp possible de M (avec χ_M, on obtient que 1 est effectivement vp); on voit aisément que $E_1(f) = Vect(1, 1, 1)$■
3) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (z, x, y)$ donc P est stable par f■

4) Posons alors $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$; celui-ci est unitaire et orthogonal à u. Pour w il suffit de le poser comme étant le produit vectoriel de u et v (il n'y a d'ailleurs pas d'autre choix dès que v est précisé) donc on prend $w = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$■

5) La matrice de f dans la base (u, v, w) est (diagonale par blocs) $N = diag(1, S)$, où S est la matrice de g dans la base (v, w) ainsi $det(M) = det(N) = det(S) = 1$ donc g est une rotation du plan $P = Vect(v, w)$. Votre cours montre aussi que $S = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$, où a est à déterminer (modulo 2π). Par évaluation de trace on a $1 + 2\cos(a) = tr(M) = 0$ soit $a = \pm\dfrac{2\pi}{3}$. Pour trancher sur le signe, décomposons suivant (v, w), $f(v) = -\dfrac{1}{2}v + \dfrac{\sqrt{3}}{2}w$. Ainsi g est la rotation de P d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$■

6) La composante suivant u est fixé, la composante suivant P subit une rotation plane d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$■

....

....

Exercice 6 : (D'après Centrale et Mines)

Ici $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle; on rappelle, à toutes fins utiles, que, pour (x, y) de E^2 : $x \bullet y = {}^tXY$, où X, Y désignent les matrices colonnes des composantes de x, y dans la base canonique. Soit $f \in L(E)$ dont la matrice dans la base canonique est notée A. Enfin, on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tA$.

1) Etablir que : $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y > = < x, f^*(y) >$.

2) En déduire que F, sous-espace vectoriel de E, est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

3) Applications :

a) Prouver alors, que si n est impair, il existe au moins une droite vectorielle et un hyperplan de E, stables par f.

b) Ici $n = 3$.

i) Préciser l'orthogonal du plan P d'équation : $x - y + z = 0$.

ii) En déduire que P est stable par f canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : 1) Matriciellement cela revient à vérifier que ${}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY$; ce qui est clair■

2) On prend $x \in F^\perp$ et $y \in F$, comme $< f(y), x >=< y, f^*(x) >$ et $f(y) \in F$, la conclusion en découle■

3)a) Un polynôme de degré impair, à coefficients réels possède une racine réelle. En appliquant ceci à χ_f et à χ_{f^*}, on met en évidence deux valeurs propres l'une pour f, l'autre pour l'adjoint de f. Ainsi on dispose de deux droites vectorielles de E D, stable par f et Δ, stable par f^*. Dès lors D et $\Delta^\perp$ sont stables par f et répondent à la question■

b)i) Il s'agit de $Vect(1, -1, 1)$.

ii) On constate que ${}^t(1, -1, 1)$ est colonne propre de ${}^tA$, de vp associée -1. Donc P est, par ce qui précède, stable par f (puisque son orthogonal est stable par f^*)■

....

....

Exercice 7 : ⋆ (Matrice de Hilbert)

Démontrer que les valeurs propres de $M = (\dfrac{1}{i + j - 1}) \in M_n(\mathbb{R})$ sont strictement positives.

(ind : utiliser le cours et le fait que $\displaystyle\int_0^1 (\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1})^2 dt \geq 0$ pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$).

Solution : Il nous faut donc montrer (puiqu'à l'évidence $M \in S_n(\mathbb{R})$) que $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour cela on se donne $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul et on montre que ${}^t(X)MX > 0$.

Un calcul à faire donne ${}^t(X)MX = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq} \frac{x_i x_j}{i + j - 1} = \sum_{1 \leq i,j \leq} x_i x_j \int_0^1 t^{i-1+j-1} dt$, donc par Fubini et linéarité de l'intégrale :

${}^t(X)MX = \displaystyle\int_0^1 (\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1})^2 dt$. Or l'intégrande $t \to (\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1})^2$ est continue, positive et non identiquement nulle sur [0,1] (pour ce dernier point il faut invoquer qu'un au moins des x_i n'est pas nul) donc notre intégrale est, comme voulue, strictement positive■

....

....

Exercice 8 : (A faire absolument)

1)Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{6} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. En préciser les caractéristiques géométriques.

2) Déterminer la distance de $u = (1,1,1)$ au plan P d'équation : $x + 2y - z = 0$.

....

....

Exercice 9 : (CCINP)

On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \in E^2 \to (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

Soit $\phi : P \in E \to (X^2-1)P" + 2XP'$.

1) Prouver que ϕ est un endomorphisme auto-adjoint de E.

2) Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de E.

3) Quel est le spectre de ϕ? Cet endomorphisme est-il diagonalisable?

4) Montrer qu'il existe une b.on de E, étagée en degré dans laquelle ϕ est représenté par une matrice diagonale.

Solution : Pour des détails voir un des groupes avec lequel cet exercice a été traité.

1) La linéarité de ϕ vient de celle de la dérivation polynomiale. Il est aussi à noter que : pour tout $P \in E$, $deg(\phi(P) \leq 3$ donc que $\phi \in L(E)$.

En observant que $\phi(P) = ((X^2-1)P')'$ et intégrant par parties, nous obtenons $(\phi(P)|Q) = [(X^2-1)P'Q]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt$, ce pour tout P, Q dans E.

On voit immédiatement que l'échange de P et Q dans la formule précédente est sans effet donc que $(\phi(P)|Q) = (\phi(Q)|P)$ soit aussi $(\phi(P)|Q) = (P|\phi(Q))$ ainsi $\phi in S(E)$■

2) Pour tout entier $n \geq 0$, $\phi(X^n) = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}$. On en déduit aisément la matrice désirée■

3) La matrice précédente étant triangulaire on en lit le spectre sur sa diagonale. Dès lors $Sp(\phi) = \{0,2,6,12\}$. ϕ est dz car auto-adjoint ou parce qu 'il possède un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples■

4)On a déjà $\phi(1) = 0 = 0.1$, $\phi(X) = 2.X$; de $\phi(X^2) = 6X^2 - 2$ on déduit que $\phi(X^2 - \dfrac{1}{3}) = 6(X^2 - \dfrac{1}{3}) = 6$ et de $\phi(X^3 + aX) = 12(X^3 + aX)$ on tire $(2a-6)X = 12aX$ soit $a = 3/5$. Bilan $(1, X, X^2 - 1/3, X^3 - 3/5)$ fournit une base dans laquelle ϕ est représenté par $diag(0,2,6,12)$■

....

....

Exercice 10 : ($\star$)

Les questions sont totalement indépendantes.

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $t_1 \geq t_2 ... \geq t_n$.

Prouver que $\forall k \in [|1,n|], \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{ii} \leq \sum_{i=1}^{k} t_i$.

2) Montrer que $(A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2 \Longrightarrow tr(AB) \geq 0$ et que, si de plus A est inversible alors AB est diagonalisable.

3) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ sont des fermés de $M_n(\mathbb{R})$.

4) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique $B \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $B^5 = A$.