Correction DM 10

Exercice 1

1°) $f(x) = \ln(3x^2-5x+7)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x^2-5x+7>0$ donc f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\Delta = 25-84<0$
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{6x-5}{3x^2-5x+7}$

2°) $f(x) = \ln(9-3x)$ $\quad 9-3x>0 \Leftrightarrow x<3$
$\forall x \in]-\infty;3[$, $f'(x) = \dfrac{-3}{9-3x} = \dfrac{1}{x-3}$

3°) $f(x) = \ln((x+1)(5-x))$ avec $(x+1)(5-x)>0$ entre les racines : -1 et 5.
$(x+1)(5-x) = -x^2+4x+5$

$f'(x) = \dfrac{-2x+4}{-x^2+4x+5}$

Exercice 2

(E) $e^x = \dfrac{1}{x}$

I $f(x) = x-e^{-x}$.

1°) (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

2°) Signe de f.

a) Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1+e^{-x}>0$
donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$ par opérations sur les limites.

Ainsi, sur $\mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue car dérivable} \\ f \text{ est strictement croissante} \\ 0 \in]-\infty;+\infty[\text{ (intervalle image)}\end{array}\right\}$ d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} < 0$
$f(1) = 1-\frac{1}{e}>0$
donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

d) sur $[0;\alpha]$, $f(x) \leq 0$

II g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$

1°) $g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+e^x} = x \underset{\text{car } 1+e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x = x+xe^x \Leftrightarrow xe^x-1=0 \Leftrightarrow x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

2°) $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x \Leftrightarrow x=\alpha$
donc α est l'unique réel solution de $g(x)=x$ (on dit que α est un point fixe de g)

3°) g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{(1+e^x)\times 1 - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$

$(1+e^x)^2 > 0$ sur $[0,1]$. $1 - xe^x \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} - x \geq 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} \leq 0$
$\Leftrightarrow f(x) \leq 0$

or dans la partie I, on a vu (2d) que $\forall x \in [0,\alpha]$, $f(x) \leq 0$.
Ainsi $g'(x) \geq 0$ sur $[0,\alpha]$.
Donc **g est strictement croissante sur $[0,\alpha]$**.

Exercice 3

f définie sur $]0;+\infty[$, $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln(x)$

1°) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est une FI du type $\infty - \infty$.
$\forall x > 0$, $f(x) = \ln(x)\left((\ln(x))^2 - 3\right)$ donc par produit, **$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$**

b) en 0, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ est aussi une FI du type $-\infty + \infty$.

asymptote verticale $x=0$

$f(x) = \underset{\downarrow -\infty}{\ln(x)}\left(\underbrace{\ln(x)^2}_{\to +\infty} - 3\right)$ donc par produit, **$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$**

2°) f est dérivable sur $]0;+\infty[$, $f'(x) = 3\times\frac{1}{x}\times(\ln(x))^2 - 3\times\frac{1}{x}$
$= \dfrac{3(\ln(x)^2 - 1)}{x} = \boxed{\dfrac{3(\ln x + 1)(\ln x - 1)}{x}}$

3°)

$\ln(x) + 1 \geq 0$	$\ln(x) - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow \ln x \geq -1$	$\Leftrightarrow \ln(x) \geq 1$
$\Leftrightarrow x \geq e^{-1}$	$\Leftrightarrow x \geq e$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$	

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$			
$\ln x - 1$				$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^3 - 3\times(-1) = 2$
$f(e) = 1^3 - 3\times 1 = -2$

4°) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)^2 - 3) = 0$
$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\ln(x)^2 - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\ln(x)^2 = 3$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\ln(x) = \pm\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow$ **$x = 1$ ou $x = \frac{1}{e^{\sqrt{3}}}$ ou $x = e^{\sqrt{3}}$**