CCINP 2021 exercice 3 : Méthode de Héron

La numérotation (modulo 24) est bien celle de l'énoncé distribué.

Exercice 3 - Approximation d'une racine carrées par la méthode de Héron

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et $tr(M)$ la trace de la matrice M.

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$ et la relation de récurrence :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \dfrac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$.
On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus.
Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Solution : Pour $k \geq 1$ et $x \geq 0$, on a : $(f_k(x))^2 - x = (\dfrac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) - \dfrac{x}{f_{k-1}(x)}\right))^2 \geq 0$.
   Comme $f_k(x) > 0$, l'assertion en découle■

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   Solution : Pour $k \geq 2$ et $x \geq 0$, $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(-f_{k-1}(x) + \dfrac{x}{f_{k-1}(x)}\right) \geq 0$, par ce qui précède, donc $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante■

3. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   Solution : Notre suite est décroissante et positive donc convergente vers une limite $L_x \geq 0$.
   Premier cas : $x > 0$ donc par Q1 et conservation des inégalités à la limite $L_x \geq \sqrt{x} > 0$. Ainsi en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite $(f_k(x))$, nous obtenons $L_x = \dfrac{1}{2}(L_x + \dfrac{x}{L_x}) \iff L_x = \pm\sqrt{x}$; la stricte positivité de la limite impose $L_x = \sqrt{x}$.
   Deuxième cas $x = 0$, en revenant à la définition on voit que $(f_k(0))$ est une suite géométrique de raison $1/2$ donc converge vers $0 = L_0$.
   Bilan : $f_k \overset{CVS}{\to} f$ sur $\mathbb{R}_+$■

I.2 - Majoration de l'erreur

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right).$$

   Solution : Simple calcul■

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$
Solution : On procède par récurrence.
Si $k = 1$: $|f_1(x) - \sqrt{x}| = \frac{1}{2}(1 + x - 2\sqrt{x}) \leq \frac{1+x}{2}$; initialisé donc.
On suppose l'inégalité vraie au rang $k \geq 1$. Avec l'inégalité obtenue dans la question précédente, il vient :
$|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}$, puisque $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leq 1$. L'hérédité en découle et la récurrence se poursuit.
Notez que le résultat de cette question assure la convergence uniforme, sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, de la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers f ■

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on sait que B est une racine carrée de A.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geq 0$.
Solution : Partons de $B^2 = A$, ce qui entraîne $det(B)^2 = det(A)$; comme les matrices utilisées sont à coefficients réels, il en va de même pour leurs déterminants ainsi $det(A) = det(B)^2 \geq 0$ ■

7. Etudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
Solution : On ne fera pas de calcul. $A^2 = 0_2$ donc $B^4 = 0_2$, ce qui veut dire que B est une matrice nilpotente d'ordre 2. Par le théorème de Cayley-Hamilton, il vient $B^2 = 0_2$; c'est absurde puisque $A \neq 0_2$ ■

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

8. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Solution : S est diagonalisable car symétrique réelle ■

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :
$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

9. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S.
Solution : On a $R^T = R$ puisque $P \in O(n)$ donc R est symétrique.
De plus $R^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$. R est bien une matrice symétrique, racine carrée de S ■

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

On note $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère également la partie C_P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$C_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+\}.$$

10. Vérifier que $I_n \in C_P$. Montrer que si $M \in C_P$, alors M est une matrice inversible et on a :

$$\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_P.$$

Solution : $I_n \in C_P$ puisque $I_n \in \mathcal{D}_n^+$.
Si $M \in C_P$ alors $M = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta \in \mathcal{D}_n^+$. Ainsi M est le produit de trois matrices inversibles, elle l'est donc aussi.
On calcule $P^{-1}(\frac{1}{2}(M + SM^{-1}))P$ et on trouve $\frac{1}{2}(P^{-1}MP + (P^{-1}SP)P^{-1}MP) = \frac{1}{2}(P^{-1}MP + DP^{-1}MP) \in \mathcal{D}_n^+$ puisque cet ensemble est stable par demi-somme et produit■

La question précédente implique que l'on peut définir la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C_P par :
$U_0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_k = \frac{1}{2}(U_{k-1} + SU_{k-1}^{-1})$.
On considère également la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $V_k = P^{-1}U_kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_k en fonction de D et V_{k-1}. En déduire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

où f_k est la fonction définie dans la partie I de cet exercice.
Solution : On obtient (dans le cadre imparti) $V_k = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1})$.
D'une part $V_0 = I_n$ et donc chaque V_k est diagonale (en posant $V_k = diag(a_1^k, ..., a_n^k)$) et $a_i^k = \frac{1}{2}(a_i^{k-1} + \lambda_i a_i^{k-1})$; ce qui donne la formule souhaitée■

On considère l'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(B) = \sqrt{tr(BB^T)}.$$

(On aura reconnu, j'espère, la norme de Schur)
On admet que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.
Solution : Soit $k \in \mathbb{N}$. $R - U_k = P(\Delta - V_k)P^T$ donc $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$ puisque $PP^T = I_n$■

13. En déduire à l'aide de la question 5 que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité :

$$N(R - U_k) \leq \frac{tr(S) + n}{2^k}.$$

Solution : Pour tout entier k, nous avons (cette matrice étant diagonale) en utilisant Q5 :
$N(\Delta - V_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1+\lambda_i}{2^k})^2} = \frac{1}{2^k}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^2} \leq \frac{1}{2^k}\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i))^2}$.
Comme le dernier majorant vaut $\frac{tr(S) + n}{2^k}$, la solution s'ensuit■

14. Conclure que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers R.
Solution : Puisque $\frac{tr(S) + n}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, le théorème des gendarmes donne bien $N(R - U_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$■