Corrigé du DL (Centrale 31/01) (2h max)

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A - Dérivées successives

1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
Solution: Cette fonction est de classe C^∞ sur I. Après simplifications, on obtient :
$\boxed{f' = \dfrac{1}{1-\sin}, f'' = \dfrac{\cos}{(1-\sin)^2} \text{ et } f^{(3)} = \dfrac{2+\sin}{(1-\sin)^2}}$ ■

2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
Solution: On procède par récurrence en remarquant que la formule est vraie pour $n = 0$ avec $P_0 = X + 1$ puis, en dérivant les deux membres de l'égalité au rang n, il vient :
$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\cos x P_n'(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} + (n+1)\sin x \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \dfrac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$, où on a posé :
$\boxed{P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n}$; la récurrence se poursuit bien.
Par ailleurs on a : $\boxed{P_1 = P_0 = X+1,\ P_2 = (1+X)^2 \text{ et } P_3 = (X+1)^2(X+2)}$ ■

3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
Solution: On prend comme hypothèse de récurrence les trois propriétés sur P_n à vérifier; elle est vraie au rang 1 puisque $P_1 = X+1$ et, avec $n \geq 1$ fixé, on pose $P_n = X^n + Q$, où $Q \in \mathbb{N}[X]$ et $deg(Q) \leq n-1$. Dès lors $P_{n+1} = (1-X^2)(nX^{n-1} + Q') + (n+1)X^{n+1} + (n+1)XQ = X^{n+1} + (nX^{n-1} - X^2Q' + (n+1)XQ)$, comme le polynôme entre parenthèses est de degré $\leq n$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et sont positifs (en effet en posant $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, il vient $-X^2Q' + (n+1)XQ = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)a_kX^{k+1}$), notre hypothèse est validée par récurrence■

4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Solution: Simple vérification■
Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

Solution: Pour la première égalité, il suffit de spécialiser en 0 l'égalité obtenue précédemment. Pour la seconde on dérive n fois cette égalité (celle de la question précédente), on applique la formule de Leibniz (qui donne la dérivée n-ième d'un produit de fonctions) et on spécialise en 0■

I.B - Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer
$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leq f(x).$$

Solution: La formule de Taylor à l'ordre N et appliquée à f donne :
$\forall x \in [0, \pi/2[, f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt.$
Sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, sin et cos sont positifs et ainsi (cf partie I.A) les dérivées successives de f le sont aussi (les P_n étant à coefficients positifs) donc par positivité de l'intégrande, cette formule donne bien l'inégalité voulue■

7. En déduire la minoration $R \geq \pi/2$.
Solution: Les sommes partielles de la STP $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ étant majorées par $f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$, notre série entière converge pour ces mêmes x; ceci montre bien que $\boxed{R \geq \pi/2}$■

8. Montrer
$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

Solution: Les fonctions g' et $g^2 + 1$ sont DSE sur I (au moins) par ce qui précède et la question 5 montre que leurs DSE ont les mêmes coefficients d'où l'égalité■

9. Montrer
$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$
Considérer les fonctions $\arctan f$ *et* $\arctan g$.
Solution: Les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$ sont dérivables sur I et y ont même dérivée (à savoir 1/2). Il existe donc un réel C tel que : $\forall x \in I, \arctan(f(x)) = \arctan(g(x)) + C$. Or $f(0) = g(0) = \alpha_0$ soit $C = 0$ puis (en composant par tan), $\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = g(x)}$■

10. En déduire que $R = \pi/2$.
Solution: Supposons que $R > \pi/2$ alors g serait continue en $\pi/2$ et posséderait une limite finie à gauche en ce point; ainsi, en vertu de l'égalité de f et g sur i, il en irait de même pour f alors que $f(x) \underset{x\to\pi/2^-}{\to} = \infty$. Contradiction donc $\boxed{R = \pi/2}$■

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
Solution: Question classique de sup■

12. En déduire

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Solution: D'une part $f = \dfrac{1}{cos} + \tan$ et d'autre part $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, tout cela sur I. L'unicité de la décomposition paire/impaire donne bien les identités désirées■

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
Solution: On a immédiatement : $t^{(n)}(0) = 0$ si n est pair et $t^{(n)}(0) = \alpha_n$ sinon■

14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.
Solution: $t' = 1 + t^2$■

15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$

Solution: On peut dériver $2n$ fois la relation précédente puis spécialiser en 0 (Leibniz à nouveau) ou invoquer l'unicité des coefficients d'une S.E avec un produit de Cauchy et une dérivation terme à terme■

A remettre au plus tard le lundi 5/02