Devoir à la maison n° 9
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :
   - $\cos(0\theta) = 1$, donc $T_0 = 1$,
   - $\cos(1\theta) = \cos(\theta)$, donc $T_1 = X$,
   - $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, donc $T_2 = 2X^2 - 1$,
   - $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, donc $T_3 = 4X^3 - 3X$.

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) &= 2\cos\left(\frac{(n+2)+n}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{(n+2)-n}{2}\theta\right) \\ &= 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta), \end{aligned}$$

   c'est-à-dire : $T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}$, ce qui est la formule recherchée.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons A_n le terme dominant de T_n.
   On a $A_0 = 1$, donc T_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est 1.
   D'après la formule précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} = 2XA_n,$$

   et $A_1 = X$. On reconnaît une suite géométrique, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = 2^{n-1}X^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n est donc n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

3. (a) Si $n = 0$, $T_0 = 1$ est constant donc est scindé sur $\mathbb{R}$.
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Il y a donc n valeurs distinctes de $\cos(\theta)$ (pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) telles que $\cos(n\theta) = 0$. Ce sont n racines distinctes de T_n, donc, comme $\deg T_n = n$, ce sont toutes ses racines.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, T_n possède n racines distinctes dans $]-1, 1[$. Comme $\deg T_n = n$, toutes ces racines sont simples, et T_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}\cos(n\theta) & = & \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \\ & = & \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta \\ & \underset{k=2k'}{=} & \displaystyle\sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k'} (-1)^{k'} \sin^{2k'}\theta \cos^{n-2k'}\theta \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2\theta)^k \cos^{n-2k}\theta\end{array},$$

donc $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$.

Exercice 2.

1. (a) On prend $x = y = 0$ dans l'équation vérifiée par f, alors : $2f(0) = 4f(0)$, donc $f(0) = 0$.

   (b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f(nx + x) + f(nx - x) = 2(f(nx) + f(x)),$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n + 2u_1,$$

ce qui est la formule voulue.

   ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, la somme considérée est télescopique :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=1}^{n} (u_{k-1} - u_k) \\ & = & u_{n+1} - u_1 + u_0 - u_n\end{array},$$

et d'autre part, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 2u_1 = 2nu_1,$$

donc :

$$u_{n+1} - u_1 + u_0 - u_n = 2nu_1,$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+1} - u_n = (2n+1)u_1.$$

On reconnaît à nouveau une somme télescopique, d'où :

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)u_1,$$

et finalement :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)u_1 = \left(2\frac{n(n-1)}{2} + n\right)u_1 = n^2 u_1,$$

ce qui est la formule voulue.

(c) La formule voulue est établie pour $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(0+nx) + f(0-nx) = 2(f(0) + f(nx)),$$

c'est-à-dire :

$$f(-nx) = f(nx) = n^2 f(x).$$

Donc la formule voulue est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Soit $r \in \mathbb{Q}$, puis soient $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. On a :

$$f(rx) = f\left(p\frac{x}{q}\right) = p^2 f\left(\frac{x}{q}\right).$$

Or :

$$f(x) = f\left(q\frac{x}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{x}{q}\right),$$

donc :

$$f(rx) = \frac{p^2}{q^2} f(x) = r^2 f(x).$$

(e) i. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (α_n) de rationnels convergente vers α. En effet : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit α_n rationnel $\frac{1}{n}$-proche de α. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\alpha_n - \alpha| \leq \frac{1}{n}$, donc par encadrement : $\alpha_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, i.e. $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

ii. Soit (α_n) une suite de rationnels convergente vers α. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(\alpha_n x) = \alpha_n^2 f(x),$$

donc, comme f est continue, par passage à la limite :

$$f(\alpha x) = \alpha^2 f(x).$$

(f) La formule précédente est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x = 1$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha) = \alpha^2 f(1),$$

c'est-à-dire : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^2 f(1)$. On prend alors $\lambda = f(1)$.

2. L'analyse ci-dessus montre que si $f \in E$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \mapsto \lambda t^2$. Réciproquement, toute fonction de ce type convient : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : t \mapsto \lambda t^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue, et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x+y)^2 + \lambda(x-y)^2 = 2(\lambda x^2 + \lambda y^2).$$

Donc :

$$E = \left\{ f : t \mapsto \lambda t^2 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Devoir à la maison n° 9 bis
CORRIGÉ

1. (a) Comme $f(0) = |a_0| \in f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C})$ est non-vide. Comme : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = |P(z)| \in \mathbb{R}_+$, $f(\mathbb{C})$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 0.

   (b) On a $f(z) \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_n||z|^n$, donc $f(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En effet, soit $z \in \mathbb{C}^*$:
$$\frac{f(z)}{|a_n||z|^n} = \left|\frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0}{a_n z^n}\right| = |1 + h(z)|\,,$$
où $h(z) = \dfrac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \dfrac{a_0}{a_n z^n}$, donc $|h(z)| \le \dfrac{|a_{n-1}|}{|a_n||z|} + \ldots + \dfrac{|a_0|}{|a_n||z|^n} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $h(z) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{f(z)}{|a_n||z|^n} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Il existe donc $A > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > A) \Rightarrow (f(z) > m + 12)$. Autrement dit, par contraposée : $\forall z \in \mathbb{C},\ (f(z) \le m + 12) \Rightarrow (|z| \le A)$. Donc $m = \inf\limits_{|z|\le A} f(z)$.

   (c) La fonction f est continue car composée de fonctions continues, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, est bornée sur $D(0, A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le A\}$ et atteint ses bornes. Il existe donc $z_0 \in D(0, A)$, donc $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que $f(z_0) = m$.

2. (a) En développant $P(z_0 + X)$, on obtient $b_n = \dfrac{a_n}{P(z_0)}$, donc $b_n \ne 0$ car $a_n \ne 0$ (puisque c'est le coefficient dominant de P). De plus, $Q(0) = \dfrac{P(z_0)}{P(z_0)} = 1$, et par définition de z_0 : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z_0 + z)| \ge |P(z_0)|$, donc $|Q(z)| \ge 1$.

   (b) Par définition de j, b_j est non nul, donc $-\dfrac{1}{b_j}$ est bien défini. C'est un nombre complexe non nul ; notons $re^{i\theta}$ sa forme exponentielle. On sait alors qu'une racine $j^{\text{ème}}$ en est $r^{\frac{1}{j}} e^{i\frac{\theta}{j}}$.

   (c) Par définition de j, on a : $Q(X) = b_0 + b_j X^j + b_{j+1}X^{j+1} + \ldots + b_n X^n$, avec $b_0 = Q(0) = 1$ d'après (a). Soit $t \in \mathbb{R}$, on a alors :
$$g(t) = 1 + b_j c^j t^j + b_{j+1}c^{j+1}t^{j+1} + \ldots + b_n c^n t^n = 1 - t^j + b_{j+1}c^{j+1}t^{j+1} + \ldots + b_n c^n t^n,$$
donc $\dfrac{g(t) - (1 - t^j)}{t^j} = b_{j+1}c^{j+1}t + \ldots + b_n c^n t^{n-j} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $g(t) = 1 - t^j + \underset{t\to 0}{o}(t^j)$.

   (d) Soit $t \in \,]0, 1[\,$ tel que $\left|\dfrac{g(t) - (1 - t^j)}{t^j}\right| \le \dfrac{1}{2}$. Alors $|g(t)| \le 1 - t^j + \dfrac{t^j}{2} = 1 - \dfrac{t^j}{2} < 1$.
Donc $|Q(ct)| < 1$, ce qui est exclu d'après (a). Donc $P(z_0) = 0$, et le théorème de d'Alembert-Gauss est démontré.