Corrigé Méthode de Stein (CCMP PC/PSI 2015)

- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \{P = (p_n,\ n \geq 0)/\ \forall n \geq 0,\ p_n \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1\}$$

- Pour $P, Q \in \mathcal{P}$, on définit

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \sup_{A\subset\mathbb{N}} \left|\sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n\right| = \sup_{A\subset\mathbb{N}} \left|\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n)p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n)q_n\right|$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum\limits_{n\in A} p_n$.

- Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est à dire une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite
$$c\frac{\lambda^n}{n!},\ n \geq 0$$
appartienne à $\mathcal{P}$.
Solution : On trouve $\boxed{c = e^{-\lambda}}$ ■

2. Soient p, q deux réels de $[0, 1]$. Calculer
$$\operatorname{dist}\left((1-p, p, 0, \dots), (1-q, q, 0, \dots)\right)$$
Solution : On trouve $\boxed{\mathrm{dist}\left((1-\mathrm{p}, \mathrm{p}, 0, \dots), (1-\mathrm{q}, \mathrm{q}, 0, \dots)\right) = |\mathrm{p}-\mathrm{q}|}$ ■

3. Soient $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)p_n,\ n \geq 0)$ est convergente. **Solution :** Soit un réel M tel que $\forall n, |f(n)| \leq M$. Alors pour tout entier naturel n nous avons $|f(n)p_n| \leq Mp_n$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0} p_n$ est absolument convergente, il en va de même (comparaison) de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)p_n$ ■

2 Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\ n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)p_n^{(\lambda)},\ n \geq 0)$ est convergente.
Solution : Notons u_n le terme général de cette série; nous avons $u_n = O(n\frac{\lambda^n}{n!})$. On sait que la série entière exponentielle possède un rayon de convergence infini donc c'est aussi le cas pour $\sum_{n\geq 0} n\frac{\lambda^n}{n!}$. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$(toujours par comparaison) est ACV■

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :
$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} \tag{1}$$
Solution : Les deux questions précédentes nous assurent de l'existence des deux membres de l'égalité à vérifier.
Effectuons dans la somme de gauche le changement d'indice $m = n+1$, il vient :
$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{m=1}^{+\infty} f(m)p_{m-1}^{(\lambda)}$.
Or $\lambda p_{m-1}^{(\lambda)} = mp_m^{(\lambda)}$ d'où le résultat■

Soit $Q = (q_n,\ n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :
$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)q_n$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = \mathcal{P}_\lambda$.
Solution : Fixons un entier $i \geq 1$ et définissons $g \in \mathcal{F}$ par $g(n) = \delta_{i,n}$ (symbole de Kronecker).
On applique la relation vérifiée par (q_n) en utilisant g et il vient :
$\lambda q_{i-1} = iq_i$.
Dès lors, par simple itération, $q_n = \frac{\lambda^n}{n!}q_0$ et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1$, nous obtenons (cf série exponentielle ou Q1) $q_0 = e^{-\lambda}$ et, par conséquent, $\boxed{Q = \mathcal{P}_\lambda}$■

3 Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivate soit satisfaite :
$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} \tag{2}$$
Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par
$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,
$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} \tag{3}$$
Solution :$f \in \mathcal{S}_\langle$ équivaut à $f(1) = \frac{\tilde{h}(0)}{\lambda}$ et pour tout $n \geq 1$ $f(n+1) = \frac{nf(n) + \tilde{h}(n)}{\lambda}$.
Par ce biais on voit que la suite $(f(n))_{n\geq 1}$ est déterminée de façon unique mais que $f(0)$ est arbitraire.
Ce qui montre bien le caractère infini de $\mathcal{S}_h$.
Etablissons cette relation par récurrence.
$f(1) = \frac{\tilde{h}(0)}{\lambda}$, ce qui établit l'initialisation.

On suppose la formule établie au rang n donc $f(n+1) = \dfrac{nf(n) + \tilde{h}(n)}{\lambda} = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} + \tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!})$, ce qui est la formule souhaitée au rang $n+1$■

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} \tag{4}$$

Solution : Posons, pour alléger $t = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$.

On a donc $\tilde{h} = h - t$, ce qui montre déjà que $\tilde{h} \in \mathcal{F}$ et, par conséquent (cf Q1,Q3) que la série de terme général $\tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge. Il va nous suffire (grâce à la question précédente) de montrer que la somme de cette série est nulle.

On a, par linéarité somme de séries convergentes : $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!} = te^\lambda - t\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} = 0$■

9. En déduire que toute fonction de $\mathcal{S}_h$ est bornée.

Solution : Puisque on a vu précédemment que $\tilde{h}$ était bornée, il nous suffit de montrer que la suite $(\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!})$ est majorée.

On reconnaît le reste d'ordre $n-1$ d'une série exponentielle en $\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, ainsi avec la formule de Taylor avec reste intégral, il vient :

$\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}) = \int_0^\lambda \dfrac{(\lambda - t)^{n-1}}{(n-1)!}e^t dt.$

De là on déduit (par majoration inégrande) que (et pour tout $n \geq 1$) :

$\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} \leq e^\lambda \int_0^\lambda \dfrac{(\lambda - t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = e^\lambda \dfrac{\lambda^n}{n!}.$

Par suite,$\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} \leq e^\lambda \dfrac{1}{n} \leq e^\lambda$. Notre objectif est bien atteint■

4 Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction Δf définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$,

$$\sup_{n \geq 1} |\Delta f(n)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k)\right) \tag{5}$$

Pour un entier $m \geq 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \quad \text{et} \quad h(n) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Etablir pour $1 \leq n \leq m$ l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}p_m^{(\lambda)}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Solution : Evaluons pour ce faire (et pour tout entier k) $\tilde{h_m}(k) = h_m(k) - t$ en adaptant la notation employée en Q8. Ceci donne $\tilde{h_m}(k) = \delta_{k,m} - p_m^{(\lambda)}$.

Ici $n \leq m$ donc avec Q7 $f_m(n) = \dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\dfrac{\lambda^k}{k!} = -\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n}p_m^{(\lambda)}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lambda^k}{k!}$■

11. Etablir une identité analogue pour $n > m \geq 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geq 1$.

    Solution : Même démarche mais avec Q8 cette fois et on obtient alors $f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ ■

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \backslash \{0, m\}$. *Indication* : on distinguera les cas $1 \leq n < m$ et $n > m \geq 0$.

    Solution : Premier cas $1 \leq n < m$: $\Delta f_m(n) = p_m^{(\lambda)} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} (\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n\lambda^{k-1}}{k!})$.

    En isolant le terme d'indice 0 de la seconde somme du membre de droite et après changement d'indice dans cette même somme , nous obtenons :

    $\Delta f_m(n) = p_m^{(\lambda)} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} (-\frac{n}{\lambda} + \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{n}{k+1}) \frac{\lambda^k}{k!}) \leq 0$□

    Deuxième cas $n > m$ et après le même changement d'indice que ci-dessus :

    $\Delta f_m(n) = p_m^{(\lambda)} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} (\sum_{k=n}^{\infty} (\frac{n}{k+1} - 1) \frac{\lambda^k}{k!}) \leq 0$■

13. Etablir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0), \ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \quad \text{pour} \quad m > 0$$

    Solution :i) La première formule est fausse puisque $f(0)$ est arbitraire et de plus est inutile pour le but poursuivi□

    ii) A l'aide de Q10 et Q11 : $\Delta f_m(m) = p_m^{(\lambda)} \frac{m!}{\lambda^{m+1}} (\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!m})$.

    Soit après simplification et changement d'indice la formule voulue■

14. En déduire que

$$\sup_{n \geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

    Solution : Au vu de ce qui précède le sup cherché est un maximum et vaut $\Delta f_m(m)$. Avec Q13 on a la majoration :

    $\Delta f_m(m) \leq \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$■

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{n \in \mathbb{N}} h(k)$$

15. Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.

    Solution : Il suffit de montrer que pour tout réel s : $f \in \mathcal{S}_h \Longrightarrow f \in \mathcal{S}_{h+s}$.

    Soit n un entier naturel (en utilisant la notation allégée fixée cf Q8) de $f(n) = h(n) - t$ on déduit $f(n) = h(n) + s - s \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{(\lambda)} - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} = h(n) + s - \sum_{k=0}^{\infty} (h(k) + s) p_k^{(\lambda)}$ (on a utilisé Q1)■

16. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

    est convergente pour tout entier $n \geq 1$.

    Solution : Puisque $h_+ \in \mathcal{F}$, nous montrons que la série $\sum_{m \geq n} f_m(n)$ est ACV.

    Pour tout $m \geq n+1$ (en utilisant Q10), $|f_m(n)| \leq \frac{\lambda^{-n} e^{\lambda}}{m(m-1)} = O(1/m^2)$■

17. Montrer que la fonction f définie pour tout $n \geq 1$ par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

appartient à $\mathcal{S}_h$.

Solution : C'est assez direct.$\forall n, f(n+1) - nf(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m)(f_m(n+1) - nf_m(n))$, par linéarité sommes de séries convergentes.
Or $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$ donc en vertu du début de réponse à Q10 : $f_m(n+1) - nf_m(n)) = \delta_{n,m} - p_m^{(\lambda)}$, ce pour tout entier m.
Dès lors $\forall n, f(n+1) - nf(n) = h_+(n) - \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)}$, ce qui montre bien que $f \in \mathcal{S}_{h_+} = \mathcal{S}_h$■

18. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right)$$

Solution : Dans ce contexte on a $f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m)(\Delta f_m(n)) \leq h_+(n)(\Delta f_n(n))$ par Q12.
Dès lors (avec Q14) $f(n+1) - f(n) \leq h_+(n)\dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
La définition de h_+ donne immédiatement le résultat■

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geq 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right)$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.