Exercice 1 — Fonctions cosinus et sinus hyperbolique

On considère les fonctions notées ch et sh définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Démontrer que la fonction ch est paire et sh est impaire.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
3. Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions ch et sh. Utiliser la parité pour déduire les limites en $-\infty$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. Justifier que la courbe de $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ est une asymptote aux courbes des fonctions ch et sh. Déterminer la position de chaque courbe par rapport à l'asymptote.
5. Démontrer que les fonction ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
6. Dresser les tableaux de variations des deux fonctions ch et sh.
7. Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour visualiser les courbes des deux fonctions. Vérifier la conformité de chacune des questions précédentes en vous rapportant au graphique.

Exercice 2 — Trigonométrie hyperbolique

Soient a et b deux nombres réels.

1. Démontrer que $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$
2. Démontrer que $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}b\,\mathrm{ch}a$
3. En déduire que $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b - \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$ puis que $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b - \mathrm{sh}b\,\mathrm{ch}a$

Pour le 8/03/2024 DM nº 11 CPES

Exercice 1 — Fonctions cosinus et sinus hyperbolique

On considère les fonctions notées ch et sh définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Démontrer que la fonction ch est paire et sh est impaire.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
3. Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions ch et sh. Utiliser la parité pour déduire les limites en $-\infty$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. Justifier que la courbe de $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ est une asymptote aux courbes des fonctions ch et sh. Déterminer la position de chaque courbe par rapport à l'asymptote.
5. Démontrer que les fonction ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
6. Dresser les tableaux de variations des deux fonctions ch et sh.
7. Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour visualiser les courbes des deux fonctions. Vérifier la conformité de chacune des questions précédentes en vous rapportant au graphique.

Exercice 2 — Trigonométrie hyperbolique

Soient a et b deux nombres réels.

1. Démontrer que $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$
2. Démontrer que $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}b\,\mathrm{ch}a$
3. En déduire que $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b - \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$ puis que $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b - \mathrm{sh}b\,\mathrm{ch}a$