Feuille d'exercices 15
Espaces vectoriels

1 - Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des (sous-)espaces vectoriels ?

(a) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$,
(b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$,
(c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$,
(d) $E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotones}\}$,
(e) $E_5 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$,
(f) $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$,
(g) $E_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,
(h) $E_8 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornées}\}$,
(i) $E_9 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergentes}\}$,
(j) $E_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 2. On considère les vecteurs $u = (2,3)$ et $v = (1,-5)$ de $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
(b) Exprimer u et v en fonction des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
(c) Exprimer e_1 et e_2 en fonction de u et v.
(d) Faire de même avec les vecteurs $u = (2,3,0)$, $v = (1,-5,0)$ et $w = (-1,0,4)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. On considère les vecteurs $u = (2,3,-1)$, $v = (1,-1,-2)$ et $w = (5,0,-7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(v,w)$.

2 - Sous-espaces vectoriels

Exercice 4. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si oui, les écrire sous forme Vect.

(a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$,
(b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 2\}$,
(c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}$,
(d) $E_4 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } 2\}$,
(e) $E_5 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0\}$,
(f) $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,
(g) $E_7 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0\}$,
(h) $E_8 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 2z = 4t\}$,
(i) $E_9 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$,
(j) $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel, puis F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6. On considère les ensembles $A = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.
(a) Montrer que A et B sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
(b) Écrire les vecteurs $u = (1,2,1)$ et $v = (2,3,-1)$ sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
(c) Faire de même avec $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$ et $B = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(a) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_3)$,
(b) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_4, v_5)$,
(c) $\mathrm{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, v_5)$,
(d) $\mathrm{Vect}(v_1, v_4)$ et $\mathrm{Vect}(v_3, v_5)$.

Exercice 8. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Déterminer la décomposition correspondante de X^3, X^2, X et 1.

Exercice 9. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $v_5 = (0, 0, 0, 1)$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$,
(b) $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4)$,
(c) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_3, v_4) = \{0\}$,
(d) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) + \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$,
(e) $\mathrm{Vect}(v_4, v_5)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

3 - Familles libres, familles génératrices

Exercice 10. Trouver une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

(a) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$,
(b) $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = y - z = 0\right\}$,
(c) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 5t = 0\}$,
(d) $I = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + 3t = 0\}$.

Exercice 11. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

(a) $((1, 2, 3), (-1, 4, 6))$,
(b) $((1, 2, -1), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$,
(c) $((1, 2, -1), (1, 0, 1), (-1, 2, -3))$,
(d) $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$.

Exercice 12. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(a) $\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}\right)$,
(b) $\left(x \mapsto 1, \cos, \cos^2, x \mapsto \cos(2x)\right)$,
(c) $(x \mapsto 3x - 5, x \mapsto 2x + 3, x \mapsto 5x - 7)$,
(d) $(\cos, \sin, x \mapsto x \cos x, x \mapsto x \sin x)$.

Exercice 13. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (4, 1, 4)$ et $w = (2, -1, 4)$. Montrer que les familles (u, v), (v, w) et (u, w) sont libres. La famille (u, v, w) est-elle libre ?

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de vecteurs de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

(a) $(u_1, 2u_2, u_3)$,
(b) (u_1, u_3),
(c) $(3u_1 + u_3, u_3, u_2 + u_3)$,
(d) $(2u_1 + u_2, u_1 - 3u_2, u_4, u_2 - u_1)$.

Exercice 15. Comparer les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants : $F = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, 5)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\right)$.

Exercice 16. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

(a) $((1, -1, 0), (2, -1, 2))$,
(b) $((1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a))$ où $a \in \mathbb{R}$,
(c) $((1, 1, 3), (3, 4, 5), (-2, 5, 7), (8, -1, 9))$,
(d) $((1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1))$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

(a) $E = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(a) = P(b) = 0\}$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$,
(b) $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n\}$,
(c) $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$,
(d) $H = S_n(\mathbb{R})$,
(e) $I = A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18. Soient $u = (1, -1, 2)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (-1, -5, -7)$. Soient $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Donner une base de F, de G et de $F \cap G$.