Devoir surveillé n° 5

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(9 points)* On note $I = \left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$, puis $f : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 2x^3 \end{array} \right.$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{10}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Déterminer la monotonie de (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.
2. (a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2}$.
   (b) En déduire la limite de la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente vers un réel ℓ, et soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.
   (a) Soient $n \geq 2$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que : $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |v_k - \ell| + \max\limits_{k\in[\![p+1,n]\!]} |v_k - \ell|$.
   (b) Écrire mathématiquement le fait que (v_n) converge vers ℓ. En déduire que (S_n) converge vers ℓ.
4. Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2. *(7 points)*

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2. On note $P = aX^2 + bX + c$, puis $\Delta = b^2 - 4ac$.
   (a) Soit $r \in \mathbb{C}$. Calculer $P(r)$ et $P'(r)$. **En déduire** que si r est une racine double de P, alors $\Delta = 0$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double.
2. Soit $Q = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$. On note $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.
   (a) Montrer que Q admet une racine double si et seulement si $\Delta = 0$.
   (b) Déterminer dans ce cas ($\Delta = 0$) les racines de Q, puis sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
3. (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3.
      i. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Écrire la formule de Taylor appliquée à P en α.
      ii. On note $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Déterminer $\alpha, p, q \in \mathbb{C}$ tels que $P(X+\alpha) = a\left(X^3 + pX + q\right)$.
   (b) En déduire les racines de $P = 4X^3 - 12X^2 - 15X + 50$, puis sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. *(4 points)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique, et telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(k) = 0$.
2. Montrer que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Montrer plus généralement que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = 0$.
3. En déduire que f est la fonction nulle.

Problème. *(12 points)* On souhaite déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Ce problème, connu sous le nom de *problème de Bâle*, fut posé par Pietro Mengoli en 1644, et résolu par Leonhard Euler en 1735.

I. On définit la fonction $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de cotan.
   Justifier que cotan est continue sur tout intervalle de D.
2. Déterminer les variations de cotan.
3. Montrer que cotan réalise une bijection de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.

II. 1. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $Q_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

   i. Donner les expressions développées des polynômes Q_1, Q_2 et Q_3.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   ii. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

   iii. Déterminer les racines complexes de Q_n. On exprimera ces racines à l'aide de la fonction cotan. Montrer que ces racines sont simples.

2. On définit à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

   i. Donner les expressions développées des polynômes P_1, P_2 et P_3.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   ii. Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.

   iii. En déduire les racines de P_n.
   Montrer que ces racines sont simples.

   iv. Que vaut la somme des racines de P_n ? En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

III. 1. Montrer que : $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

2. En déduire que : $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de S_n.
4. Conclure.