Devoir surveillé n° 5
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) La fonction f est usuellement dérivable, et : $\forall x \in I,\ f'(x) = 1 - 6x^2 \geq 0$, donc f est croissante. De plus, $f(0) = 0 \in I$ et $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{6}} \in I$, donc $f(I) \subset I$. L'intervalle I est donc stable par f donc, comme $u_1 \in I$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$. Donc (u_n) est bien définie.

   (b) On a vu que la fonction f est croissante sur I, et : $\forall x \in I,\ f(x) - x = -2x^3 \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge d'après le théorème de la limite monotone. De plus : $\forall x \in I,\ f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$, c'est-à-dire que f admet 0 pour point fixe ; donc, comme f est continue, (u_n) converge vers 0.

2. (a) Soit $x \neq 0$:
$$\frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left((1-2x^2)^{-2} - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}(-2)\times(-2x^2) = 4,$$
donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2} = 4$.

   (b) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{(u_n - 2u_n^3)^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.

3. (a) On a : $S_n - \ell = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_k - \ell)$ donc, par inégalité triangulaire :
$$|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|v_k - \ell| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|v_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|v_k - \ell|.$$
Notons $M = \displaystyle\max_{k\in[\![p+1,n]\!]}|v_k - \ell|$, on a : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}|v_k - \ell| = \dfrac{M}{n}\sum_{k=p+1}^{n}\dfrac{|v_k - \ell|}{M} \leq M\dfrac{n-p}{n} \leq M$, donc :
$$|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|v_k - \ell| + M.$$

   (b) On a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |v_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon' > 0$, on prend $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ puis $p = N$, alors :
$$\forall n \geq N,\ |S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|v_k - \ell| + \varepsilon.$$
Or : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}|v_k - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}|v_k - \ell| \leq \varepsilon$. Alors : $\forall n \geq \max(N, N'),\ |S_n - \ell| \leq 2\varepsilon = \varepsilon'$. Donc (S_n) converge vers ℓ.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$, alors, par somme télescopique : $S_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_1}\right)$. Or, d'après les questions précédentes : $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$ donc : $\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 4$, donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n,$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 2.

1. (a) On a directement : $P(r) = ar^2 + br + c$. D'autre part, $P'(X) = 2aX + b$, donc $P'(r) = 2ar + b$. Supposons que r soit une racine double de P, alors (on note que $a \neq 0$ car P est de degré 2) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(r) & = & 0 \\ P'(r) & = & 0 \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} ar^2+br+c & = & 0 \\ r & = & -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right. \text{ donc } \frac{-b^2+4ac}{4a} = 0, \text{ donc } \Delta = 0.$$

   (b) Supposons $\Delta = 0$. Alors $c = \dfrac{b^2}{4a}$, donc $P = aX^2+bX+\dfrac{b^2}{4a} = a\left(X^2 + \dfrac{b}{a}X + \dfrac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(X + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
   Donc P admet $-\dfrac{b}{2a}$ pour racine double.

2. (a) Si $p = 0$, alors $P = X^3 + q$ admet une racine double si et seulement si $q = 0$, c'est-à-dire $\Delta = 0$.
   Sinon, on procède comme ci-dessus : soit $r \in \mathbb{C}$, supposons que r soit une racine double de Q. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q(r) & = & 0 \\ Q'(r) & = & 0 \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} r^3+pr+q & = & 0 \\ 3r^2+p & = & 0 \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} r(r^2+p) & = & -q \\ r^2 & = & -\dfrac{p}{3} \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} r & = & -\dfrac{3q}{2p} \\ r^2 & = & -\dfrac{p}{3} \end{array}\right.,$$

   donc $\dfrac{9q^2}{4p^2} = -\dfrac{p}{3}$, donc $27q^2 = -4p^3$, donc $\Delta = 0$.
   Réciproquement, supposons $\Delta = 0$. Prenons alors $r = -\dfrac{3q}{2p}$, d'après les calculs ci-dessus : $Q(r) = Q'(r) = 0$, donc r est racine double de Q.
   Donc Q admet une racine double si et seulement si $\Delta = 0$.

   (b) On suppose $\Delta = 0$.
   Si $p = 0$, on a vu que $Q = X^3$, donc Q a 0 pour racine triple et est déjà sous forme factorisée.
   Si $q = 0$, alors $Q = X^3 + pX = X(X^2+p)$ admet une racine double si et seulement si $p = 0$, et on est ramené au cas précédent.
   Sinon, on a vu que Q admet $r_0 = -\dfrac{3q}{2p}$ comme racine double. Notons r_1 la troisième racine complexe de Q, alors d'après les relations coefficients-racines : $2r_0 + r_1 = 0$, donc $r_1 = -2r_0 = \dfrac{3q}{p}$. On a donc :

$$Q = X^3 + pX + q = \left(X + \frac{3q}{2p}\right)^2\left(X - \frac{3q}{p}\right).$$

3. (a) i. La formule de Taylor appliquée à P en α s'écrit :

$$P = \frac{P^{(3)}(\alpha)}{3!}(X-\alpha)^3 + \frac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2 + P'(\alpha)(X-\alpha) + P(\alpha).$$

ii. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. D'après la formule ci-dessus :

$$P(X+\alpha) = \frac{P^{(3)}(\alpha)}{3!}X^3 + \frac{P''(\alpha)}{2}X^2 + P'(\alpha)X + P(\alpha),$$

et donc :

$$P(X+\alpha) = a\left(X^3+pX+q\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} P''(\alpha) & = & 0 \\ P'(\alpha) & = & ap \\ P(\alpha) & = & aq \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\dfrac{b}{3a} \\ p & = & \dfrac{P'(\alpha)}{a} \\ q & = & \dfrac{P(\alpha)}{a} \end{array}\right. .$$

(b) Avec les notations ci-dessus : $\alpha = -\dfrac{12}{3\times(-4)} = 1$, puis, comme $P' = 12X^2 - 24X - 15$, $p = \dfrac{P'(1)}{4} = -\dfrac{27}{4}$ et $q = \dfrac{P(1)}{4} = \dfrac{27}{4}$. Donc $\Delta = 0$, et donc $r_0 = -\dfrac{3q}{2p} = \dfrac{3}{2}$ et $r_1 = -\dfrac{4p^2}{9q} = -3$. Les racines de P sont alors $r_0 + \alpha = \dfrac{5}{2}$ et $r_1 + \alpha = -2$, donc :

$$P = 4\left(X - \frac{5}{2}\right)^2 (X+2).$$

Exercice 3.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme f est 1-périodique : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(k) = f(n)$. Or, en prenant $x = 1$: $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par passage à la limite : $f(k) = 0$.
2. Comme f est 1-périodique : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}+n\right) = f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)$. Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = f\left(\dfrac{n}{2}\right)$. On sait (avec $x = \dfrac{1}{2}$) que la suite (u_n) converge vers 0, donc sa sous-suite (u_{2n+1}) également. Donc, par passage à la limite, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   Plus généralement, soit $r \in \mathbb{Q}$, notons $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(r) = f\left(\dfrac{p}{q}+n\right) = f\left(\dfrac{qn+p}{q}\right)$. Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = f\left(\dfrac{n}{q}\right)$. On sait (avec $x = \dfrac{1}{q}$) que la suite (u_n) converge vers 0, donc sa sous-suite (u_{qn+p}) également. Donc, par passage à la limite, $f(r) = 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite de rationnels convergente vers x (cette suite existe car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0$ donc, comme f est continue, par passage à la limite : $f(x) = 0$. Donc f est la fonction nulle.

Problème.

I. 1. La fonction cotan est définie lorsque $\sin$ ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Comme cotan est le quotient de $\cos$ par $\sin$, fonctions usuellement continues sur $\mathbb{R}$, cotan est continue sur tout intervalle de D.

2. La fonction cotan est de même dérivable en tout point de D, avec : $\operatorname{cotan}' = \dfrac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = -\dfrac{1}{\sin^2} < 0$, donc cotan est strictement décroissante sur tout intervalle de D.

3. On a vu que cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$. De plus, cotan est continue sur $]0,\pi[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\mathrm{cotan}(]0,\pi[) = \left]\lim_{x\to\pi^-}\mathrm{cotan}(x), \lim_{x\to 0^+}\mathrm{cotan}(x)\right[=]-\infty,+\infty[$. Donc, d'après le théorème de la bijection monotone, cotan réalise une bijection de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.

II. 1. i. On a :

- $Q_1 = (X+1)^1 - (X-1)^1 = 2$,
- $Q_2 = (X+1)^2 - (X-1)^2 = 4X$,
- $Q_3 = (X+1)^3 - (X-1)^3 = 6X^2 + 2$.

ii. D'après la formule du binôme de Newton, on a : $(X+1)^n = X^n + nX^{n-1} +$(termes de plus bas degré) et $(X-1)^n = X^n - nX^{n-1} +$(termes de plus bas degré), donc $Q_n = 2nX^{n-1} +$(termes de plus bas degré). Donc Q_n est de degré $n-1$, et de coefficient dominant $2n$.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$, et notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$:

$$Q_n(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^n = (z-1)^n \underset{k\in[\![0,n-1]\!]}{\Leftrightarrow} z+1 = (z-1)\omega^k$$

$$\underset{k\in[\![1,n-1]\!]}{\Leftrightarrow} \quad z = -\frac{1+\omega^k}{1-\omega^k} = -\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Q_n a donc $(n-1)$ racines complexes distinctes. Comme Q_n est de degré $n-1$, ce sont toutes ses racines, et elles sont simples.

2. i. On a :

- $P_1 = \binom{3}{0} + \binom{3}{2}X = 3X+1$,
- $P_2 = \binom{5}{0} + \binom{5}{2}X + \binom{5}{4}X^2 = 5X^2 + 10X + 1$,
- $P_3 = \binom{7}{0} + \binom{7}{2}X + \binom{7}{4}X^2 + \binom{7}{6}X^3 = 7X^3 + 35X^2 + 21X + 1$.

ii. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcl} Q_{2n+1}(X) & = & (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k(-1)^{2n+1-k} \\ & \underset{k=2k'}{=} & \displaystyle 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k'}X^{2k'} \\ & = & 2P_n(X^2). \end{array}$$

iii. D'après le calcul des racines de Q_n, les racines de P_n sont les $-\left(\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2$ pour $k \in [\![1,2n]\!]$. Par parité de $x \mapsto x^2$ et par symétrie de la courbe de cotan par rapport au point $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, on prend en fait $k \in [\![1,n]\!]$.
P_n a donc n racines distinctes. Comme P_n est de degré n, ces racines sont simples.

iv. D'après les relations coefficients-racines, la somme des racines de P_n est égale à $-\frac{\binom{2n+1}{2(n-1)}}{\binom{2n+1}{2n}} = -\frac{n(2n-1)}{3}$. On trouve bien la formule voulue.

III. 1. Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont respectivement concave et convexe sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et admettent la droite d'équation $y = x$ pour tangente en 0, d'où les inégalités voulues.

2. D'après les inégalités précédentes : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$, donc :

$$\operatorname{cotan}^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \operatorname{cotan}^2(x).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, puis $k \in [\![1, n]\!]$ et $x = \frac{k\pi}{2n+1}$:

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

donc par somme :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n \leq n + \frac{n(2n-1)}{3},$$

puis :

$$\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\frac{\pi^2}{3} \leq S_n \leq \frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\frac{\pi^2}{3}.$$

4. On a : $\frac{n}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et : $\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}$, donc : $\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
Finalement, par encadrement :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$