Corrigé début Mines 2010 : Produit de Convolution

Notations.

On introduit les trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de fonctions suivants.

- $C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} u(x)$$

  On rappelle qu'une telle fonction u est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$.

- $C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles uqe

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{x \to -\infty} u^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} u^{(k)}(x)$$

  On a noté $u^{(k)}$ la dérivée k-ième de u.

- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues positives et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

On munit $C_0(\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$: plus précisément, pour toute fonction $u \in C_0(\mathbb{R})$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$$

On pourra utiliser librement le théorème de Fubini *admis* ci-dessous :

Théorème 1. *(Fubini) Soit $(x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que F vérifie les trois propriétés suivantes.*

1) Pour tous réels x, y, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(v,y)| \, dv$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t| \, dt$ convergent.

2) Les fonctions $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \, dx$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \, dy$, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \, dx$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \, dy$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

3) $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \, dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| \, dx \right) \, dy$$

converge.

Alors, dans ce cas, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \, dx$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \, dy$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ sont égales. Autrement dit, on peut intervertir les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \, dx \right) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) \, dy \right) \, dx$$

1 Préliminaires.

Pour f et g appartenant respectivement à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution $f * g$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt$$

On définit $f * g(x)$ par la même formule si $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q.1. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt$ converge pour tout réel x. Puis montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème de continuité sous les igne $\in$ et on vérifiera avec soin que les conditions de validité sont remplies). Vérifier de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = g * f(x)$$

Solution : Par définition tout élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Nous prouvons que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui impliquera qu'elle y est en particulier définie. Pour cela nous utilisons le théorème de continuité sous le signe intégral dont nous allons vérifier les hypothèses.
a) Pour tout réel t : $x \to f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque g l'est.
b) Pour tout réel x : $t \to f(t)g(x-t)$ est continue (donc CM) sur $\mathbb{R}$ puisque g et f le sont.
c) Soit M unn réel positif majorant $|g|$ (le préambule nous assure que g est bornée sur $\mathbb{R}$).
Dés lors $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)g(x-t)| \leq Mf(t)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Ce qui acte la domination.
Ces trois points donnent bien la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}\square$
Le changement de variable affine (x étant fixé) $t = x - u$, où u décrit $\mathbb{R}$, donne $f * g(x) = g * f(x)\blacksquare$

Q.2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f * g(x) = 0$. Montrer de même que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f * g(x) = 0$
Solution : On fixe t alors $f(t)g(x-t) \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$, ce puisque $g \in C_0(\mathbb{R})$. Comme l'application nulle est continue (donc CM) sur $\mathbb{R}$ et que la domination utilisée en Q1 reste valable, nous pouvons employer le théorème de la limite sous le signe intégral qui donne ici $f * g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\to} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0dt = 0\blacksquare$

Q.3. Soient f et g appartenant à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer alors que $f * g$ définit une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Plus précisément, montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, positive et d'intégrale égale à 1. (On appliquera le théorème de Fubini à la fonction $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ et on pourra se contenter de ne vérifier que les conditions 1) et 3)).
Solution : Avec les notations déjà utilisées et la domination on a :
La continuité de $f * g$ se vérifie par les mêmes arguments que ceux employés en Q1$\square$
$\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| \leq M \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = M$, ce puisque $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donc $f * g$ est bornée sur $\mathbb{R}\square$
Supposons maintenant que nous puissions utiliser le théorème de Fubini.
Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)dx)dt.$
Donc après changement de variable affine $x = u+t$ nous avons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f*g(x)dx = (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt)(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du =$ $1 \times 1 = 1\square$
Vérifions la validité de l'emploi du théorème : les applications $(x,t) \to t$ et $(x,t) \to x-t$ étant linéaires sur $\mathbb{R}^2$, elles y sont continues et, par composition et produit nous récuperons la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $(x,t) \to f(t)g(x-t)$.
Le point 1) du théorème de Fubini provient de l'intégrabilité de f et g.
Vérifions le point 3) à savoir que $F : t \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx$ est intégrable. Ceci est évident puisque pour tout réel t : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)dx = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du = f(t)\blacksquare$