Corrigé début X 2023 : Matrices stochastiques

1 Première partie

Question 1.
On somme suivant j l'inégalité supposée $P_{i,j} \geq c\nu_j$, et on obtient :
$\sum_{j=1}^{d} P_{i,j} \geq c \sum_{j=1}^{d} \nu_j$; d'où $\boxed{1 \geq c}$■
Question 2.
On pose $u = (u_1, .., u_d) \in \mathcal{P}$ alors, pour $1 \leq j, \leq d$ $(uP)_j = \sum_{i=1}^{d} P_{ij}u_i$.

D'une part ces nombres sont bien des réels positifs et, par Fubini, $\sum_{j=1}^{d}(\sum_{i=1}^{d} P_{ij}u_i) = \sum_{i=1}^{d} u_i(\sum_{j=1}^{d} P_{ij}) = \sum_{i=1}^{d} u_i = 1$, par double stochasticité (de P et u) et on a bien montré que $\boxed{uP \in \mathcal{P}}$■
Question 3.
On peut observer que pour $u, v \in \mathcal{P}$: $\sum_{k=1}^{d} (u_k - v_k)\nu_j = 0$ donc
$(uP - vP)_j = \sum_{k=1}^{d}(u_k - v_k)(P_{k,j} - c\nu_j)$
Puis, comme $P_{k,j} - c\nu_j \geq 0$ (tout cela pour tout j) :
$\|uP - vP\|_1 \leq \sum_{k=1}^{d}(|u_k - v_k|) \sum_{j=1}^{d}(P_{k,j} - c\nu_j)$

ce qui donne $\|uP - vP\|_1 \leq (1 - c) \sum_{k=1}^{d} |u_k - v_k|$, puisque $\nu \in \mathcal{P}$■
Question 4.
Le résultat de la question 2 justifie que les termes de la suite $(x_n)_n$ appartiennent bien à $\mathcal{P}$. En itérant l'inégalité de la question précédente (avec $(u, v) = (x_n, x_{n-1})$ et les précédents), on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|$.
Comme $(1 - c) \in [0, 1[$, la série de terme général $(1 - c)^n$ converge, donc, par majoration, celle de terme général $\|x_{n+1} - x_n\|_1$ converge également■
Question 5.
Soit $1 \leq j \leq d$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$|x_{n+1,j} - x_{n,j}| \leq \|x_{n+1} - x_n\|_1$ donc, par majoration et par lien suite-série, la série de terme général $x_{n+1,j} - x_{n,j}$ converge (à j fixé). Ainsi, la suite de vecteurs $(x_n)_n$ converge, composante par composante, donc converge□
De plus, $\mathcal{P}$ est fermé, car il s'agit de l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par une application linéaire (continue donc car dimension finie). Ainsi $\lim(x_n) \in \mathcal{P}$■
Question 6.
La continuité (dimension finie) de l'application linéaire $t \mapsto tP$ permet d'obtenir $\mu = \mu \cdot P$ en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = x_nP$.
Si deux vecteurs μ, μ' conviennent, l'inégalité de la question 3 donne $\|\mu' - \mu\|_1 \leq (1 - c)\|\mu' - \mu\|_1$, ce qui n'est possible que si $\mu = \mu'$ puisque $c > 0$■
Question 7.
Soit $x \in \mathcal{P}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$\|xP^n - \mu\|_1 = \|xP^n - \mu P^n\| \leq (1 - c)^n \ \|x - \mu\|_1 \leq (1 - c)^n(\|x\|_1 + \|\mu\|_1)$ ce par itération de l'inégalité de la question 3. De plus, pour tout $y \in \mathcal{P}$, on a $\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{d} y_j = 1$ Ceci donne le facteur 2 recherché dans l'inégalité■