Corrigé du DS7 (4h) CCINP + Mines

Exercice 1 :
Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$ en majorant la valeur absolue de leurs intégrandes.

Q3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.(On procédera à un encadrement de $|F(x)|$ auparavant)

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer* $H(x) + iG(x)$.

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$.

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Solution ;
Q1. Application classique (cf première année) de l'inégalité des accroissements finis$\blacksquare$
Q2. On fixe le réel $x > 0$. Les trois intégrandes sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour la première et sur $\mathbb{R}_+$ pour les deux autres et sont dominées toutes les trois sur leur intervalle de définition par $t \to e^{-tx}$, ce qui montre l'existence de nos trois intégrales généralisées puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$ est notoirement convergente$\blacksquare$
Q3. On a donc pour tout $x > 0$ (Inégalité triangulaire + Q1) : $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$. Le théorème des gendarmes permet de conclure aisément$\blacksquare$
Q4. On va bien sûr utiliser la règle de Leibniz pour dériver sous le signe intégral.
On constate d'abord que :
•$\forall t > 0, x \to \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (exp l'étant elle-même).
•$\forall x > 0, t > 0 \to \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf Q2).
• $\forall x > 0, t \to \dfrac{\delta}{\delta x}(\dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}) = -\sin(t) e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y est continue par morceaux$\square$
On procède ensuite à la domination (sur tout segment ici de la dérivée partielle de l'intégrande suivant le paramètre.
Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, $x \in [a, b]$ alors :
$\forall t > 0, |-\sin(t) e^{-tx}| \leq e^{-at}$ et $t \to e^{-at}$ est bien positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$$\square$
Nous pouvons appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral à F.
Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\forall x > 0, F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = -G(x)}$$\blacksquare$

Q5. On a facilement (et pour tout réel $x > 0$) $H(x) + iG(x) = \dfrac{1}{x - i} = \dfrac{x + i}{x^2 + 1}$ d'où $\boxed{G(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}}$ et $\boxed{H(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}}$$\square$

Le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\alpha}$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \frac{H(x/\alpha)}{\alpha} = \boxed{\frac{\alpha^2}{x^2 + \alpha^2}}$$\blacksquare$

Q6 Les deux questions précédentes justifient l'existence d'un réel C tel que :
$\forall x > 0, F(x) = C - \arctan(x)$.
Sachant que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$, il vient $C = \frac{\pi}{2}$.
En conclusion $\boxed{\forall x > 0, F(x) = \arctan(\frac{1}{x})}$ et $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{2}}$ ■

....
....

Exercice 2 :

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.
Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des partie I et II.
Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Etude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.
2. A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(|)$. On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ pour tout $x \in E$.
Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

5. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6. Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$.
7. Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2.$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues f : $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.
9. En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est convergente.
10. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
11. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions :

$$\varphi_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son nuique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élement de E_α, ce qu'on fera désormais.
Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

14. Montrer que $(|)$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\|.\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx\right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

15. Soit n un entier ≥ 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

16. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(|)$.
(Entendre par là que les vecteurs de cette famille sont othogonaux deux à deux)

17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0\leq n\leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.
19. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

22. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.
23. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ $(A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 22 à la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question 23 est en réalité valable pour tout fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solution officielle et assez indigeste du concours

I. Résultats préliminaires

I.1. Etude d'une série entière

1. Soit $x > 0$.
   - $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$.

   Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann et $1 - x < 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

- $\dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{1/t^2} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées, donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

  Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge, donc $\Gamma(x)$ existe.

  De plus, pour tout $t>0$, $t^{x-1}e^{-t}>0$, donc, par stricte positivité de l'intégrale convergente,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geq 0.$$

2. Soit $x>0$.
   Posons $u(t)=t^x$, $u'(t)=xt^{x-1}$, $v'(t)=e^{-t}$, $v(t)=-e^{-t}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $u(t)v(t) = t^x e^{-t} \underset{t\to0^+}{\to} 0$, car $x>0$.
   $u(t)v(t) = t^x e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
   Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \Gamma(x+1)$ converge, donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ converge et

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \Big[t^x e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt\\ &= 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a, $a_n>0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\Gamma((n+\alpha+1)+1)}{(n+1)\Gamma(n+\alpha)}$ donc avec Q2 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+\alpha+1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
   Ainsi d'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, $R=1$.
4. Pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+\alpha}x^n e^{-t}}{n!}dt.$$

   Fisons $x\in]-1,1[$ et posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\in\mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{t^{n+\alpha}x^n e^{-t}}{n!}$.

   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{x^n}{n!}e^{n+\alpha}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple (par une constante indépendante de t) d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1).
   - Pour tout $t>0$, $\displaystyle\sum_{n\geq0} f_n(t) = \sum_{n\geq0} t^\alpha e^{-t}\frac{(xt)^n}{n!}$ converge (multiple d'une série exponentielle) et sa somme vaut :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = t^\alpha e^{-t}e^{xt} = t^\alpha e^{(x-1)t}.$$

     De plus, f est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt = \frac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+\alpha-1) = a_n|x|^n$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq0}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt = \sum a_n|x|^n$ converge (car $x\in]-1,1[$, disque ouvert de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq0} a_n x^n$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq0} a_n x^n$ converge absolument).

   D'où, d'après le théorèmùe d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t}dt.$$

Posons $u = (1-x)t \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{1-x}$. (Changement de variable affine)

D'où, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t}dt$ converge, on peut effectuer le changement de variable sur l'intégrale impropre et la nouvelle intégrale converge et :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1-x)^\alpha} e^{-u}\frac{du}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

On a donc bien l'égalité demandée.

I.2. Projections orthogonales

Tout est du cours dans cette partie, et il s'agit de le redémontrer...

5. Comme F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $F \oplus F^\perp = E$.
   Par suite, pour tout $x \in E$, il existe un unique $(y,z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y+z$ et on pose alors $\pi_F(x) = y$.

6. Pour tout $y \in F$, $y = \displaystyle\sum_{i=1}^n (y|e_i)e_i$ (décomposition dans une base orthonormée).
   De plus, pour tout $x \in E$, en notant $x = y+z$ la décomposition de X selon $F \oplus F^\perp$, on a :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (x|e_i) = (y|e_i) + \underbrace{(z|e_i)}_{=0 \text{ car } e_i \in F \text{ et } z \in F^\perp} = (y|e_i),$$
   donc on a bien
   $$\pi_F(x) = y = \sum_{i=1}^n (y|e_i)e_i = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i.$$

7. On a $x = \pi_F(x) + x - \pi_F(x)$ où $\underbrace{\pi_F(x)}_{\in F} \perp \underbrace{(x-\pi_F(x))}_{\in F^\perp}$, donc, d'après le théorème de pythagore,
   $$\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x-\pi_F(x)\|^2,$$
   donc on a bien
   $$\|x-\pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 \quad \text{(d'après la question précédente).}$$

II. Polynômes de Laguerre

8. cf cours

9. Soit f et g deux éléments de E_α.
   $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.
   Pour tout $x > 0$, $0 \le |x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)| = x^\alpha e^{-x}|f(x)g(x)| \le x^\alpha e^{-x}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2} d$
   converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes (car $f, g \in E_\alpha$), donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)|dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est absolument convergente, donc convergente.

10. • $E_\alpha \subset \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ par définition de E_α.
    • La fonction nulle est dans E_α, donc $E_\alpha \neq \emptyset$.
    • Pour tout $(f,g) \in E_\alpha$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in E_\alpha$ car :
    - $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions continues.

- pour tout $x \geq 0$,
$$x^\alpha e^{-x}((\lambda f+g)(x))^2 = \lambda^2 x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + 2\lambda x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) + x^\alpha e^{-x} g(x)^2,$$
donc
$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}((\lambda f+g)(x))^2 dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx + 2\lambda \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$$
converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

- E_α est donc bien un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

11. Soit p une fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$. Alors :
    - p est continue sur $\mathbb{R}_+$, car polynomiale.
    - En posant $p^2 : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ (possible car p^2 est encore polynomiale) on a, pour tout $x > 0$,
    $$x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \sum_{k=0}^{d} a_k x^{\alpha+k} e^{-x},$$
    donc
    $$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \Gamma(\alpha+1+k)$$
    est convergente comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes (car $\underbrace{\alpha+1}_{>0}+k > 0$).

    On a donc bien $p \in E_\alpha$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme prosuit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
On a
$$\begin{aligned}
\varphi_0 &: x \mapsto x^\alpha e^{-x},\\
\text{donc } \psi_0 &: x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_0^{(0)}(x) = 1,\\
\varphi_1 &: x \mapsto x^{\alpha+1} e^{-x},\\
\text{donc } \varphi_1^{(1)} &: x \mapsto (\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1} e^{-x},\\
\text{donc } \psi_1 &: x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_1^{(1)}(x) = (\alpha+1) - x,\\
\varphi_2 &: x \mapsto x^{\alpha+2} e^{-x},\\
\text{donc } \varphi_2^{(1)} &: x \mapsto (\alpha+2)x^{\alpha+1} e^{-x} - x^{\alpha+2} e^{-x},\\
\text{donc } \varphi_2^{(2)} &: x \mapsto (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha+2)x^{\alpha+1} e^{-x} + x^{\alpha+2} e^{-x},\\
\text{donc } \psi_2 &: x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_2^{(2)}(x) = (\alpha+2)(\alpha+1) - 2(\alpha+2)x + 1.
\end{aligned}$$

13. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $g_a : x \mapsto x^a$.
g_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par récurrence immédiate,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad g_a^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (a-i)\right) x^{a-k}$$
où, par convention, le produit vide (pour $k=0$) vaut 1. Posons aussi $h : t \mapsto e^{-t}$.
h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad h^{(k)} = (-1)^k e^{-t}.$$
D'où, comms $\varphi_n = g_{n+\alpha} h$, on a, d'après la formule de Leibniz, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_{n+\alpha}^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod_{i=0}^{k-1} (n+\alpha-i)\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\psi_n : x \mapsto & x^{-\alpha}e^x\varphi_n^{(n)}(x)\\ &= x^{-\alpha}e^x\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{n+\alpha-k}e^{-x}\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)x^{n-k}\end{aligned}$$

donc ψ_n est bien polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme

$$\binom{n}{0}(-1)^{n-0}\prod_{i=0}^{0-1}(n+\alpha-i) = (-1)^n \neq 0,$$

son degré est n et son coefficient dominant est $(-1)^n$.

14. • Pour tout $(f,g)\in E_\alpha^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx$ existe d'après la question 9.
• Pour tout $(f,g,h)\in E_\alpha^3$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda f+g|h) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(\lambda f(x)+g(x))h(x)dx\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)h(x)dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}g(x)h(x)dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)}\end{aligned}$$

donc $(|)$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $(f,g)\in E_\alpha^2$,

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}g(x)f(x)dx(g|f),$$

donc $(|)$ est symétrique.
• $(|)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
• Pour tout $f\in E_\alpha$, pour tout $x>0$, $x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)\geq 0$, donc, par positivité de l'intégrale convergente ("$0\leq +\infty$"), on a :

$$(f|f) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx \geq 0.$$

De plus, comme $x\mapsto x^\alpha e^{-x}f(x)^2$ est continue positive, comme $0<+\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx$ converge, on a

$$\begin{aligned}ff = 0 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)^2dx = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\quad x^\alpha e^{-x}f(x)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x>0,\quad f(x)=0,\end{aligned}$$

donc $(|)$ est défini positif.
$(|)$ est donc bien un produit scalaire sur E_α.

15. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
• D'après les calculs faits à la question 13, on a, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}(-1)^{k-i}x^{n+\alpha-i}e^{-x}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)\right).$$

Pour tout $i\in[\![0,k]\!]\subset[\![0,n-1]\!]$, $n+\alpha-i\geq\alpha+1>0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+\alpha-i} = 0$, donc

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x}\underbrace{x^{n+\alpha-i}}_{\to 0}\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\right)\underset{x\to 0}{\to} 0$$

comme somme finie (nombre de termes indépendant de x) de termes de limite nulle.

• De plus,

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-x/2}} = \sum_{i=0}^{k}\left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x}\underbrace{x^{n+\alpha-i}e^{-x/2}}_{\to 0 \text{ par croissances comparées}}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

comme somme finie (nombre de termes indépendant de x) de termes de limite nulle, donc on a bien

$$\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x/2}).$$

16. • Soit m et n deux entiers naturels.
Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx \qquad (HR_k).$$

Initialisation : Par définition de ψ_n et $(|)$, on a

$$(\psi_m|\psi_n) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \psi_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx,$$

donc on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx$ converge.
Posons alors $u(x) = \psi_m^{(k)}(x)$, $u'(x) = \psi_m^{(k+1)}(x)$, $v'(x) = \varphi_{(n-k)}(x)$, $v(x) = \varphi_{(n-k-1)}(x)$ (avec $n-k-1 \geq 0$).
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
ψ_m est polynomiale sur $\mathbb{R}_+$, donc $\psi_m^{(k)}$ est polynomiale sur $\mathbb{R}_+$, donc

- $\psi_m^{(k)}$ a une limite finie en 0, donc comme $\varphi_n^{(n-k)}$ a une limite nulle en 0 d'après la question précédente, on a
$$\lim_{x\to 0} u(x)v(x) = \lim_{x\to 0} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x) = 0.$$
- et $u(x)v(x) = \psi_m^{(k)}(x)o(e^{-x/2}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ converge, donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\begin{aligned}\psi_m\psi_n &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx\\ &= (-1)^k\left(\left[\psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx\right)\\ &= (-1)^k\left(0 - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx\right) = (-1)^{k+1}\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx\end{aligned}$$

On a donc bien HR_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx,$$

donc, en particulier, pour $k = n$, on a bien :

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

• Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \neq n$, et, quitte à intervertir les rôles, supposons que $m < n$.
Alors, d'après le premier point, on a

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

Or ψ_m est une fonction polynomiale de degré $m < n$, donc $\psi_m^{(n)} = 0$, donc

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0.$$

La famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $(|)$.

17. D'après la question précédente,

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = \psi_n\psi_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

Or ψ_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficient dominant $(-1)^n$, donc pour tout $x \geq 0$, $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$, donc

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_\alpha^2 &= (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} (-1)^n n!\varphi_n(x)dx \\ &= n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-x}dx = n!\Gamma(n+\alpha+1).\end{aligned}$$

III. Approximation

18. De la même façon qu'à la question 16, on peut montrer par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$(\mathrm{f}_k|\psi_n) = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)f_k^{(i)}(x)dx = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)(-k)^i e^{-kx}dx$$

donc, en particulier, pour $i = n$, on obtient

$$\begin{aligned}(\mathrm{f}_k|\psi_n) &= k^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)e^{-kx}dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-(k+1)x}dx \\ &= k^n \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}}e^{-u}\frac{du}{k+1} \quad \text{(changement de variable } u = (k+1)x \text{ (affine)}\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 17,

$$\begin{aligned}&= \frac{\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1)\right)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}}\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\end{aligned}$$

donc, d'après les questions 3 et 4, comme $\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n$$

converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{2k+1}{(k+1)^2}\right)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)(k+1)^{2\alpha+2}}{(2k+1)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

19. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, V_N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E_α, et $\left(\dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{n\in[\![0,N]\!]}$ en est une base orthonormée, donc, d'après la question 7,

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$$

.

Or

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(2k+1)^\alpha} e^{-u} \frac{du}{2k+1} \quad \text{(changement de variable affine } u = (2k+1)x) \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \qquad = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 &= \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \\
&\underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f_k|\psi_n)^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} = 0,
\end{aligned}$$

donc on a bien $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha = 0$.

20. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$.
En particulier, pour $N = N_0$, on a $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$, et $\pi_N(f_k) \in V_N = ((\psi_n)_{0\leq n\leq N} \subset \mathcal{P}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{P}$, donc $p = \pi_N(f_k)$ convient.

21. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
g est continue sur $]0,1]$ par opérations sur les fonctions continues.
De plus, $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} f\underbrace{(-\ln t)}_{\to+\infty} = 0 = g(0)$ (par hypothèse sur f), donc g est aussi continue en 0 et, par suite, sur $[0,1]$.
Alors, d'après le théorème admis, il existe une fonction polynomiale $p : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $|g(t) - p(t)| \leq \varepsilon$.
On a alors, pour tout $x > 0$, comme $e^{-x} \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right| &= \left| f(-\ln(e^{-x})) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e^{-x})^k \right| \\
&= |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

donc $\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq \varepsilon^2$.
On a donc, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2,$$

donc, apr positivité de l'intégrale convergente (avec $0 \leq +\infty$), on a

$$0 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x) \right)^2 dx = \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \Gamma(\alpha+1).$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ dans le théorème admis, on a alors $\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2$, donc $\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon$.

22. Soit f vérifiant les hypothèses et $\varepsilon > 0$.
D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, d'après la question 20, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $\|f_k - p_k\|_\alpha \leq \varepsilon$, et on a alors

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k \right\|_\alpha &= \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k + \sum_{k=0}^n \lambda_k (f_k - p_k) \right\|_\alpha \\ &\leq \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \, \|f_k - p_k\|_\alpha \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^n |\lambda_k| \varepsilon = \left(1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

en posant $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k \in \mathcal{P}$, on a bien (quitte à remplacer ε par $\varepsilon / \left(1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k \right)$ au début de la réponse),

$$\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

23. Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto h(\sqrt{x}) e^{x/2}$.
h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et a une limite nulle en $+\infty$ (car elle est nulle sur $]A^2, +\infty[$, donc, d'après la question 22, pour tout $\alpha > -1$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que

$$\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

Or

$$\begin{aligned} \|f - p\|_\alpha &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f(x) - p(x))^2 dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha (f(x) e^{-x/2} - p(x) e^{-x/2})^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^\alpha (h(\sqrt{x}) - p(x) e^{-x/2})^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha} (h(t) - p(t^2) e^{-t^2/2})^2 2t dt \end{aligned}$$

en posant le changement de variable $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$.
Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors, en prenant $\alpha = -1/2$ (et le p correspondant à cette valeur de α) et $q : t \in \mathbb{R} \mapsto p(t^2)$, qui est une fonction polynomiale paire, on a

$$\begin{aligned} \|f - p\|_{-1/2} &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha} (h(t) - p(t^2) e^{-t^2/2})^2 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} (h(t) - q(t) e^{-t^2/2})^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx = \|f - p\|_{-1/2} \leq \varepsilon.$$