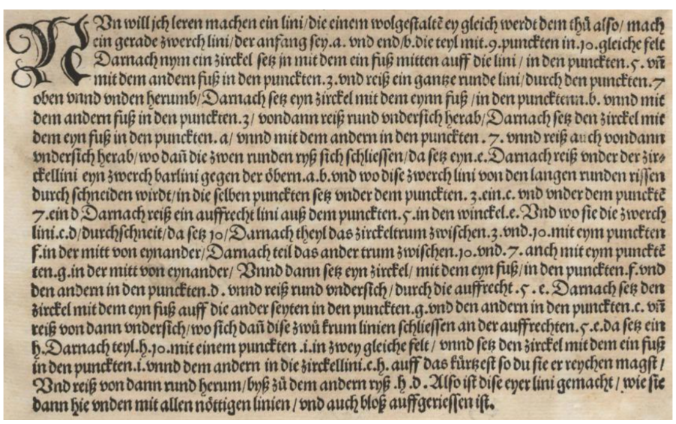
Devoir à la maison n° 10

Exercice 1. On souhaite déterminer l'ensemble E des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y)\,(1 - f(x)f(y)) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = f'(0)$.
3. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(f(x)) = ax + b$.
4. En déduire que f est constante. Conclure.

Exercice 2. En 1525, le célèbre peintre Albrecht Dürer décrit, dans son ouvrage *Underweysung der Messung* (Instructions pour la mesure), une méthode de dessin d'œuf :


NUn will jch leren machen ein lini/die einem wolgestaltē ey gleich werdt dem thů also/ mach ein gerade zwerch lini/der anfang sey.a. vnd end/b.die teyl mit.9.punckten in.10.gleiche felt Darnach nym ein zirckel setz jn mit dem ein fuß mitten auff die lini / in den punckten.5.vñ mit dem andern fuß in den punckten.3.vnd reiß ein gantze runde lini/durch den punckten.7 oben vnnd vnden herumb/Darnach setz eyn zirckel mit dem eynn fuß /in den punckten.b. vnnd mit dem andern fuß in den punckten.3/ vondann reiß rund vndersich herab/Darnach setz den zirckel mit dem eyn fuß in den punckten.a/ vnnd mit dem andern in den punckten .7. vnnd reiß auch vondann vndersich herab/wo dañ die zwen runden ryß sich schliessen/da setz eyn.e.Darnach reiß vnder der zirckellini eyn zwerch barlini gegen der öbern.a.b.vnd wo dise zwerch lini von den langen runden rissen durch schneiden wirdt/in die selben punckten setz vnder dem punckten. 3.ein.c. vnd vnder dem puncktē 7.ein d Darnach reiß ein auffrecht lini auß dem punckten.5.in den winckel.e.Vnd wo sie die zwerch lini.c.d/durchschneit/da setz 10/Darnach theyl das zirckeltrum zwischen.3.vnd.10.mit eym punckten f.in der mitt von eynander/Darnach teil das ander trum zwischen.10.vnd.7.anch mit eym punckten.g.in der mitt von eynander/ Vnnd dann setz eyn zirckel/ mit dem eyn fuß/in den punckten.f.vnd den andern in den punckten.d. vnnd reiß rund vndersich / durch die auffrecht .5 . e. Darnach setz den zirckel mit dem eyn fuß auff die ander seyten in den punckten.g.vnd den andern in den punckten.c. vñ reiß von dann vndersich/wo sich dañ dise zwů krum linien schliessen an der auffrechten.5.e.da setz ein h.Darnach teyl.h.10.mit einem punckten .i.in zwey gleiche felt / vnnd setz den zirckel mit dem ein fuß in den punckten.i.vnnd dem andern in die zirckellini.c.h. auff das kürtzest so du sie er reychen magst / Vnd reiß von dann rund herum/byß zů dem andern ryß .h.d . Also ist dise eyer lini gemacht / wie sie dann hie vnden mit allen nöttigen linien / vnd auch bloß auffgeriessen ist.

Je me propose maintenant d'enseigner la construction d'une ligne qui ressemble à un œuf bien fait. Procède comme suit. Trace une droite horizontale qui commence en a et se termine en b. Divise-la à l'aide de 9 points en 10 segments égaux. Prends alors un compas, pose une de ses pointes sur le point 5 au milieu de la droite, l'autre sur le point 3 et décris un cercle complet passant par le point 7 et situé de part et d'autre de la droite. Pose ensuite l'une des pointes du compas sur le point b, l'autre sur le point 3 et décris un arc de cercle vers le bas. Puis, pose une des pointes sur le point a, l'autre sur le point 7 et décris de là un arc de cercle vers le bas. Inscris la lettre e là où les deux arcs se croisent. Puis, trace en dessous du cercle une ligne horizontale parallèle à la droite ab au-dessus et désigne ses points d'intersection avec les arcs de cercle longs par des lettres, c le point situé en dessous de 3, d en dessous de 7. Puis, trace une droite verticale du point 5 vers l'angle e. Désigne par 10 le point où elle coupe la ligne horizontale cd. Puis, divise l'arc de cercle situé entre 3 et 10 par un point f en son milieu. Puis, divise le second arc, entre 7 et 10, par un point g en deux parties égales. Puis, pose une pointe du compas sur le point f et l'autre sur le point d et décris vers le bas un arc de cercle coupant la verticale $5e$. Puis, pose une pointe du compas sur le point g de l'autre côté, la seconde pose-la sur le point c et décris vers le bas un arc de cercle. Marque un h au point où les deux arcs se croisent sur la verticale $5e$. Puis, divise $h10$ par un point i en deux parties égales. Pose une pointe du compas sur ce point i, l'autre sur la circonférence ch sur le point le plus proche que tu puisses atteindre. Et décris un arc de cercle jusqu'à l'autre arc hd. L'ove est ainsi construit.

trad. Jeanne Peiffer, 1995.

1. Faire un dessin.
2. Afin de modéliser la situation, on munit la figure d'un repère orthonormé d'axe des abscisses $(5e)$. Dans ce repère, le point a a donc pour coordonnées $(0, -5)$ et le point b $(0, 5)$. De plus, on appelle j le symétrique du point 10 par rapport au point 5.
   On note alors $y = f_1(x)$ l'équation cartésienne de la courbe $j7$, et $y = f_2(x)$ celle de la courbe $7d$. Déterminer f_1 et f_2. En déduire les coordonnées (x_d, y_d) du point d.
3. En 1891, Hermann Staigmüller remarque que l'œuf de Dürer n'est pas lisse au point d. Il propose alors de remplacer le point f par un autre point f' de l'arc de cercle $3 - 10$. On note $\theta = \widehat{a5f'}$.
   (a) Écrire les coordonnées (x', y') de f' en fonction de θ. En déduire l'équation $y = f_3(x)$ de la courbe dh en fonction de x', y', x_d, y_d.
   (b) Montrer que l'œuf est de classe C^1 en d lorsque $2\cos\theta + 3\sqrt{5}\sin\theta = 5$.
   (c) Résoudre cette équation, et déterminer θ en degrés au centième près.
4. Refaire un dessin avec ce nouveau point f'.