TD 14 : Corrigé

Exercice 1 : (Changement de Variables)
On pose sous réserve d'existence $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2dt}{1+t^4}$.
1) A l'aide du changement de variable $t = 1/u$, trouver une relation entre I et J (toujours sous réserve d'existence).
2) Etablir que $\phi : t > 0 \to t - \dfrac{1}{t}$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même.
3) Calculer (en justifiant l'existence de l'intégrale généralisée associée) $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2}$.
4) En effectuant dans K le changement de variables défini en 2), prouver l'existence de I et J et donner leur valeur.
5) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty (\frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}})dx$ converge et indiquer sa valeur.

Exercice 2 : Intégrales de Poisson (Centrale)
a)Démontrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ sont de même nature.
b) Etablir qu'elles convergent.
c) On note I et J leurs valeurs. En calculant $I + J$, déterminer I et J.
Solution : On pose pour $t \in]0, \pi/2]$, $f(t) = \ln(\sin t)$; il s'agit d'une fonction continue sur cet intervalle.
Le changement de variable affine $t = \pi/2$, où $x \in]0, \pi/2[$ donne le résultat souhaité.
b) Le préambule de la réponse au a) prouve que 0 est la seule borne problématique.
Si $t \to 0^+$ $\ln(\sin t) = \ln(t + t\epsilon(t)) = \ln(t) + \ln(1 + \epsilon(t))$, où ϵ est une fonction de limite nulle en 0. En particulier $\ln(\sin t) \sim \ln t$ comme l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ est absolument convergente, il en va de même (comparaison) de $\displaystyle\int_0^1 \ln(\sin t)dt$ et ainsi l'existence de I est prouvée.
c) Par linéarité des IG convergentes, il vient (et les deux membres ont du sens) :
$I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{1}{2}\sin 2t)dt$.
Ainsi $2I = -\dfrac{\pi \ln 2}{2} + \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)dt$ puis par changement de variable affine $t = x/2$, nous obtenons $2I = -\dfrac{\pi \ln 2}{2} + \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx$.
Avec Chasles : $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)dx$.
Le changement de variable affine $x = \pi/2 + t$ dans la dernière intégrale donne $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)dx = J$.
De tout ceci on déduit que $2I = -\dfrac{\pi \ln 2}{2} + I$.
Donc $I = J = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$ ■

Dans les trois exercices qui suivent on note systématiquement f l'intégrande.

Exercice 3 : (Nature d'intégrales généralisées)
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :
a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2e^{-t}}$. b) $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^a dt$, où $a \in \mathbb{R}$. c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^a(1+t^b)}$, où a,b sont des réels.
Solution : a) o)f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. $\mp\infty$ sont des bornes problématiques.
i) En $+\infty$: $f(t) \sim e^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}dt$ est ACV donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge (absolument).
ii) La nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est aussi (poser $t = -x$) celle de $\displaystyle\int_0^\infty f(-x)dx$.
Et $x^2 f(-x) \sim e^{-x}$ en $+\infty$ donc la règle du x^2 s'applique elle donne (comme on le sait) $f(-x) = o(1/x^2)$ en

$+\infty$ donc, par comparaison puisque $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ACV, $\int_0^\infty f(-x)dx$ converge (absolument).
iii) Les points i) et ii) assurent la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ ■
b) o)f est continue sur $]0,1[$ ($a<0$ n'étant pas exclu).
i)L'application $\phi : x]0,+\infty[\to e^{-x}$ est de classe C^1, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.
Ainsi le changement de variable $t=\phi(x)$ donne à étudier la nature de $\int_0^\infty x^a e^{-x}dx$.A priori les deux bornes sont problématiques là encore, on notera que l'intégrande est positive (donc CV = ACV).
ii) En 0 : $x^a e^{-x} \sim x^a = \frac{1}{x^{-a}}$. Donc (positivité oblige ACV = CV) $\int_0^1 x^a e^{-x}dx$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^{-a}}$ de même nature ainsi $\int_0^1 x^a e^{-x}dx$ converge ssi $-a<1 \iff a>-1$ (Riemann en 0).
iii) En $+\infty$ on a $x^2(x^a e^{-x}) = \frac{x^{a+2}}{e^x} \to 0$ par croissaance comparée usuelle donc la règle du x^2 (détaillée plus haut) s'applique et nous assure de la convergence de $\int_1^\infty x^a e^{-x}dx$ (inconditionnellement sur a).
iv) Conclusion par transfert de nature : $\int_0^1 (-\ln t)^a dt$ converge ssi $a>-1$ ■
c) o)f est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Donc 2 bornes problématiques et ACV = CV.
i)Nature de $\int_0^1 f(t)dt$?
Si $b=0$, il s'agit de la nature de $\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$. C'est une IG de référence il y a CV ssi $a<1$.
Si $b>0$, alors $1+t^b \to 1$ si $t\to 0$ donc en 0 : $f(t) \sim \frac{1}{t^a}$. Donc par le même argument que précédemment il y a CV de $\int_0^1 f(t)dt$ ssi $a<1$.
Si $b<0$ on a cette fois $t^b\to\infty$ si $t\to 0$ donc en 0 : $f(t)\sim \frac{1}{t^{a+b}}$ (puisque $1+t^b \sim t^b$). Toujours, grâce aux intégrales de Riemann en 0, on a CV ssi $a+b<1$.
Bilan 1 : $\int_0^1 f(t)dt$ converge $\iff (b\geq 0$ et $a<1)$ ou $(b<0$ et $a+b<1)$.
ii) Nature de $\int_1^\infty f(t)dt$?
Le changement de variable légitime $t=1/x$; où $x\in]0,1[$ ne modifie pas cette nature qui est donc après changement de variable cette de $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2-a}(1+x^{-b})}$ On peut donc applique le bilan 1 qui donne : $\int_1^\infty f(t)dt$ converge $\iff (b\leq 0$ et $2-a<1$) ou $(b>0$ et $2-a-b<1$) ou plus simplement :
Bilan 2 : $\int_1^\infty f(t)dt$ converge $\iff b\leq 0$ et $a>1$ ou $b>0$ et $a+b>1$.
Conclusion : En confrontant les deux bilans précédents nous avons.
$\int_0^\infty \frac{dt}{t^a(1+t^b)}$ converge $\iff (b>0$ et $a+b>1$ ou $(b<0$ et $a+b<1$■

Exercice 4 : (Calculs d'intégrales généralisées)
Après avoir prouvé la convergence de intégrales généralisées qui suivent, en donner la valeur :
a) $\int_0^\infty \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}dt$. b) $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}}dt$.
c) $\int_0^\infty \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$. d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$.
e) $\int_0^\infty (\int_x^\infty e^{-t^2}dt)dx$.

Solution : La valeurs des IG est notée I dans tous les cas.
a) 0)f est continue sur $]0,+\infty[$ positive sur $[1,+\infty[$, négative ailleurs (donc ACV = CV encore). i) En 0 fausse singularité $f(t)\to 0$ par limite usuelle donc $\int_0^1 f(t)dt$ CV. ii) En $+\infty$ la règle t^2 (non détaillée voir plus haut) donne $\int_1^\infty f(t)dt$ CV.
iii) Conclusion : $\int_0^\infty \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}dt$ converge.
iv) Pour déterminer I on procède au changement de variable légitime $t=1/x$, où x décrit $]0,+\infty[$. Celui-ci donne $I=-I$ donc $I=0$ ■

b) o)f est continue et positive sur $[0,1[$ donc 1 est la seule borne problématique.
i) En 1 $f(t)=\dfrac{t}{(1+t^2)^{3/2}\sqrt{1+t}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\sim\dfrac{1}{4\sqrt{1-t}}$ et (cf cours) $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge (Riemann en une borne finie = même chose qu'en 0) car $1/2<1$. Donc notre IG (A)CV par comparaison.
ii) Pour trouver I on peut penser à utiliser le changement de variable légitime $t=\tan x$, où $x\in]0,\dfrac{\pi}{4}[$. Avec un peu de trigonométrie, il vient (égalité de valeurs car CV vérifiée ci-dessus) : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{\cos(2x)}}dx=[-\frac{\sqrt{\cos(2x)}}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}}=1/2$ ■
c) o) f est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Donc 2 bornes problématiques : 0 et $+\infty$.
i) En 0 : $f(t)=\ln(t^2+1)-2\ln(t)$ or $\displaystyle\int_0^1\ln(t)dt$ est une intégrale généralisée de référence convergente et $t\to\ln(t^2+1)$ étant continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1\ln(t^2+1)dt$ converge (double fausse singularité) aussi donc, par linéarité de la convergence des IG, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge aussi.
ii) En $+\infty$: $f(t)\sim\dfrac{1}{t^2}$ (en vertu de l'équivalent usuel $\ln(1+u)\sim u$ pour $u\to 0$). Comme $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2}$ est ACV, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{\infty}f(t)dt$ est (A)CV.
iii) Les deux points précédents montre l'existence de I.
iv) On procède à une IPP généralisée en posant $g(t)=t$ pour $t>0$, le crochet $[f(t)g(t)]_0^{\infty}$ existant puisque les deux limites valent 0 (utiliser la forme donnée de f en i) pour la limite en 0 et l'équivalent de f proposé en ii) pour ∞) ainsi (égalité de valeurs) :
$I=0-0-\displaystyle\int_0^{\infty}g(t)f'(t)dt=-\int_0^{\infty}t\frac{-2/t^3}{1+1/t^2}dt=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=2[\arctan(t)]_0^{\infty}=\pi$ ■
d)o) f est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$.
La nature de l'intégrale généralisée à étudier est donc celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$.
i)On organise l'intégrande : $f(t)=\dfrac{e^t}{(e^t+1)^2}$ qui est la dérivée de $t\to\dfrac{-1}{e^t+1}$ dont les limites en 0 et $+\infty$ sont respectivement $-1/2$ et 0 donc par le théorème fondamental de l'analyse généralisé cette IG converge et sa valeur $I=0-(-1/2)=1/2$■
Exercice 5 : (Mines)
On note ϕ la fonction partie entière.
a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 t\phi(1/t)dt$ converge.
b) Déterminer sa valeur.
(On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$)
Solution : a) On observe que pour tout entier naturel non nul n : $f(t)=nt$ pour $t\in]\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}]$, ce qui montre (faire un dessin) que f est bien continue par morceaux sur $]0,1]$.
Le changement de variable(légitime)$t=1/x$, où $x>1$ donne que notre IG est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\phi(t)}{t^3}dt$ dont la seule borne problématique est ∞
Comme $0\leq\phi(t)\leq t$, on a $\dfrac{\phi(t)}{t^3}=O(1/t^2)$, par comparaison, notre IG converge.
b) D'après votre cours cela signifie que la série (dont le terme général sera noté u_n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\phi(t)}{t^3}dt$ converge et que sa somme est la valeur de notre iG.
On calcule cette somme en revenant aux sommes partielles et en évaluant son terme général :
i) Calcul du terme général $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\phi(t)}{t^3}dt=n\int_n^{n+1}\frac{1}{t^3}dt$, ce qui donne $u_n=-n\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)^2})$
Donc, par télescospage, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{2}(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2})$.

En passant à la limite $\displaystyle\int_0^1 t\phi(1/t)dt = \frac{\pi^2}{12}$ ■

Exercice 6 : (Utilisation des séries : X,Mines)

a) Montrer que $\phi : t \geq 0 \to t^{2023} + t$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On note Φ sa bijection réciproque. Est-ce une fonction C^1?

On définit, pour $t \geq 0$, $f(t) = \sin(\phi(t))$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \Phi(n\pi)$ et $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$.

b) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série alternée convergente.

c) Que dire de la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$?

d) A l'aide d'une démarche similaire vérifier que l'intégrale généralisée précédente n'est pas absolument convergente.

Solution : a) Fait en classe. Notez bien comme vu sur son graphe que Φ est strictement croissante, de limite ∞ en $+\infty$ et concave sur $\mathbb{R}_+$; ce qui veut dire (on a vérifié qu'elle était C^1 que sa dérivée est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs on a pour tout $t \geq 0$, $\phi(\Phi(t)) = t$ soit:

(1) $(\Phi(t))^p + \Phi(t) = t$, où on a posé $2023 = p$.

Comme $\Phi(t) \to +\infty$, $\Phi(t))^p \sim t$ en $+\infty$ ou $\Phi(t) \sim t^{1/p}$. Enfin comme il a été rappelé ce matin : $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\phi'(\Phi(x))} = \dfrac{1}{p(\Phi(x))^{p-1} + +1} \sim \dfrac{1}{px^{\frac{p-1}{p}}}$, pour $x \to = \infty$ (avec l'équivalent précédent).

On dispose donc de (2) : $\boxed{\Phi'(x) \sim \dfrac{1}{px^{\frac{p-1}{p}}} \text{ en } +\infty}$ ■

b) Pour tout n les changements de variable donnés ce matin donnent : $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(u)\Phi'(u + n\pi)du$.

i) La positivité sur $[0, \pi]$ du sinus, celle sur $\mathbb{R}_+$ de Φ' implique (par positivité intégrale) que u_n est du signe de $(-1)^n$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est bien alternée.

ii) Prouvons que la suite $(|u_n|)$ décroît. Pour cela on étudie, pour tout n, le signe de $|u_n| - |u_{n+1}|$.

Cette expression vaut aussi :

$$\int_0^{\pi} \sin(u)\Phi'(u + n\pi)du - \int_0^{\pi} \sin(u)\Phi'(u + (n+1)\pi)du = \int_0^{\pi} \sin(u)(\Phi'(u + n\pi) - \Phi'(u + (n+1)\pi))du.$$

La décroissance de Φ' garantit la positivité de l'intégrande et ainsi la décroissance voulue.

iii) Nous allons (par encadrement) montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

La majoration utilisée ici est différente de celle donnée avec le second groupe afin d'éviter un raisonnement un peu laborieux sur les équivalents qui a eu du mal à passer.

Par simple majoration du sinus par 1 et de $\Phi'(u + n\pi)$ par $\Phi'(n\pi)$ (décroissance de cette dérivée) nous avons (croissance intégrale), ce pour tout n :

$0 \leq |u_n| \leq \pi\Phi'(n\pi)$ L'équivalent (2) montre que $\Phi'(n\pi) \sim \dfrac{1}{2023\pi^{2023}n^{2022/2023}}$ donc que la suite majorante de notre encadrement tend vers 0.

La suite $(|u_n|)$ converge bien vers 0 par théorème des gendarmes■

c) La question précédente montre que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt)$ possède une limite finie (notée L) si $n \to +\infty$.

Avec la relation de Chasles cela signifie que $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt \to L$ (dans le même contexte). On voit que $x_0 = 0$ ($\phi(0) = 0$) et que la suite (x_n) est strictement croissante de limite $+\infty$ (parce que Φ possède ces mêmes propriétés).

Nous allons montrer que $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt \to L$ si $x \to \infty$.

Fixons x, il existe un n tel que $x \in [x_n, x_{n+1}[$ et $G(x) = G(x_n) + \displaystyle\int_{x_n}^x f(t)dt$ Donc $|G(x) - G(x_n)| \leq \displaystyle\int_{x_n}^x |f(t)|dt \leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|dt = |u_n|$. Si $x \to \infty$ alors n fait de même et $(|u_n|)$ converge vers 0 (b)) et $G(x_n) \to L$ soit $G(x) \to L$ ■

d) Pour montrer que notre IG n'est pas ACV vérifions que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge.

Or pour tout n : $|u_n| \geq \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(u)\Phi'((n+1)\pi)du$ (par décroissance Φ') donc $|u_n| \geq 2\Phi'((n+1)\pi)$.

L'équivalent (2) donne encore $\Phi'((n+1)\pi) \sim \dfrac{1}{2023\pi^{2023}n^{2022/2023}}$

On reconnaît en cet équivalent le terme général d'une série divergente, la divergence de $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ en découle

$\blacksquare$