TD 16 : Intégrales généralisées et normes (Corrigé)

Exercice 1 :
1) Pour quelles valeurs du réel a l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$ converge-t-elle?
2) Que vaut l'intégrale généralisée précédente pour $a = 1/2$?

Exercice 2 :
Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(thx)dx$.

Exercice 3 :
Pour x réel positif, on pose $f(x) = \dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ et $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$, ce pour tout n.
1) Quel est le lien entre la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$ et celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$?
2) Soit un entier naturel n : établir que $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x+n\pi}{1+(x+n\pi)^6\sin^2 x}dx$.
3) En déduire que $u_n \leq 2(n+1)\pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}$.
4) Par concavité du sinus sur $[0,\pi]$, établir que $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0,\pi/2]$.
5) En déduire une majoration de u_n.
On donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{\arctan(\frac{\pi a}{2})}{a}$.
6) Conclure à l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 :
Soient n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a un réel
On pose, pour $P \in E$, $N_a(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(a)|$.
1) N_a est-elle une norme sur E?
2) Si oui, prouver qu'elles sont toutes équivalentes.
Solution:
1) i)N_a est parfaitement définie puisque, pour $P \in E$, $N_a(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |P^{(k)}(a)|$.
ii) N_a est positive puisque la valeur absolue l'est.
Donnons nous P, Q dans E et un réel λ.
iii) Alors $N_a(\lambda P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |^{(k)}(a)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |P^{(k)}(a)| = |\lambda| N_a(P)$, par propriétés somme et dérivation. N_a est bien homogène.
iiii) $N_a(P+Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |P^{(k)}(a) + Q^{(k)}(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} (|P^{(k)}(a)| + |Q^{(k)}(a)|)$, par inégalité triangulaire usuelle. Dès lors, par simple linéarité de la somme, $N_a(P+Q) \leq N_a(P) + N_a(Q)$, ce qui constitue l'inégalité triangulaire pour N_a.
On rappelle la formule de Taylor ((T) dans la suite) pour $P \in E$ et a réel :

$$\boxed{\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)}$$

iiiii) Si $N_a(P) = 0$ alors pour tout entier k, $P^{(k)}(a) = 0$ donc avec (T) $P = 0$ et la séparation de N_a est validée.
Bilan : N_a est bien une norme sur E ■

2) Donnons nous un réel b et montrons que N_a et N_b sont équivalentes.
Nous posons $M = \underset{0\leq k\leq n}{max} |b-a|^k$; on remarquera que $M \geq 1$.
Donnons nous $P \in E$ et fixons $0 \leq j \leq n$.
Alors en appliquant (T) à $P^{(j)}$ et en spécialisant en b, il vient :
$P^{(j)}(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} P^{(k+j)}(a)$ donc, en passant aux valeurs absolues et par inégalité triangulaire :
$|P^{(j)}(b)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|b-a|^k}{k!} |P^{(k+j)}(a)|$ et puisque $|b-a|^k \leq M$ (par définition de M) et comme $k! \geq 1$ (pour $0 \leq k \leq n$), on a :
$|P^{(j)}(b)| \leq M \sum_{k=0}^{n} |P^{(k+j)}(a)| \leq M N_a(P)$.
Ainsi $N_b(P) = \sum_{j=0}^{n} |P^{(j)}(b)| \leq (n+1) M N_a(P)$.
On en déduit (en échangeant les rôles de a et b) que :
$\frac{1}{(n+1)M} N_a \leq N_b \leq (n+1) M N_a$, ce qui montre que les normes N_a et N_b sont bien équivalentes■

Exercice 5 : (Norme subordonnée)
On supposera $n \geq 2$.
Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(M) \overset{def}{=} \max_{\lambda \in Sp(M)} (|\lambda|)$ et on l'appelle rayon spectral de M; il s'agit donc du plus grand des modules des valeurs propres de M.
1) Déterminer le rayon spectral de $\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.
Une norme N sur $M_n(\mathbb{C})$ est dite subordonnée s'il existe une norme ν sur $\mathbb{C}^n$ telle que :
$\forall M_n(\mathbb{C}), N(M) = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{v(Mx)}{\nu(x)}$.
On identifie, comme d'habitude, $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n$. On dit alors que N est subordonnée à ν.
2) Soit N une telle norme.
Montrer que : $\forall (A, B, p) \in M_n(\mathbb{C})^2 \times \mathbb{N}$,
a) $N(AB) \leq N(A)N(B)$,
b) $N(A^p) \leq (N(A))^p$,
c) $\rho(A) \leq N(A)$.
3) Soit $N_\infty : M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \to \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$. On admet que N_∞ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
Prouver que cette norme est subordonnée à $\|.\|_\infty$(considérée comme norme de $\mathbb{C}^n$).
Solution:
On pose $E = \mathbb{C}^n$
3) On commence par observer, pour $x \neq 0_E$, que $\frac{v(Mx)}{\nu(x)} = \nu(M(\frac{1}{\nu(x)} x))$ donc puisque $\frac{1}{\nu(x)} x$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de E, que nous noterons S.
Nous allons montrer que, pour toute $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $N_\infty(M) = \sup_{x \in S} \|Mx\|_\infty$.
Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in S, \|Mx\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = K$ par inégalité triangulaire puisque $\|Mx\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \right)$ et que, pour tout j, $|x_j| \leq 1$.
Montrons que le majorant K mis en évidence peut être atteint pour un $x = (x_1, ..., x_n) \in S$.
Prenons un entier $1 \leq i \leq n$ tel que $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ soit maximale. Pour $1 \leq j \leq n$, posons $x_j = 0$ si $a_{ij} = 0$, sinon on pose $x_j = exp(-i\theta_j)$, où θ_j est un argument de a_{ij}.
Dès lors pour ce n-uplet, l'objectif est atteint ■