Feuille d'exercices 16
APPLICATIONS LINÉAIRES

1 - PREMIERS PAS

Exercice 1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-2y, 0)$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-2y, 1)$,

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$,

(d) $f : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}$ définie par $f(P) = P(2)$,

(e) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 4f$,

(f) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = 2ff'$,

(g) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((u_n)) = (u_0, u_1, u_2)$,

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2y-z, x+z)$,

(i) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$.

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(1,0,0) = (-2,0,2), \quad f(0,1,0) = (0,3,0), \quad f(0,0,1) = (-4,0,4).$$

Déterminer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)$.

Exercice 3. On considère les vecteurs $u = (1,1)$, $v = (2,-1)$ et $w = (1,4)$ de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2,1)$, $f(v) = (1,-1)$ et $f(w) = (5,a)$ est-elle linéaire ? Déterminer f dans ce(s) cas.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (y, -x-y)$. Montrer que f est linéaire, et calculer $f \circ f \circ f$. En déduire que f est un isomorphisme, et déterminer sa réciproque.

2 - IMAGE ET NOYAU

Exercice 5. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, -3x+3y)$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-y, x-2y+z)$,

(d) $\varphi : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f' - 4f$,

(e) $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $f(P) = P'$,

(f) $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + {}^tM$,

(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$,

(h) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\overline{z}$,

(i) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P - (X+1)P'$,

(j) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, x+2ay, z)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $F = \text{Vect}\left((1,0,0),(1,1,1)\right)$. Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de noyau F.

Exercice 7. On considère l'application f de l'exercice 2.

(a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$, puis de $\text{Im } f$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

(c) Montrer que pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(1,0,0) = (-2,-1,-2), \quad f(0,1,0) = (4,0,4), \quad f(0,0,1) = (4,1,4),$$

on a $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et déterminer sa réciproque.

Exercice 9. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$. Existe-t-il $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ de noyau F ?

Exercice 10. Soient E, F, G des espaces vectoriels, puis $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

(a) Montrer que $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

(b) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$ et que $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$.

(c) En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f + \text{Im } f = E.$$

3 - Projecteurs, symétries, homothéties

Exercice 12. Déterminer l'expression :

(a) du projecteur p de $\mathbb{R}^2$ sur $F = \text{Vect}((0,1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1,1))$,

(b) de la symétrie s de $\mathbb{R}^2$ par rapport à F parallèlement à G,

(c) de la symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F = \text{Vect}((1,2,3))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$,

(d) du projecteur p de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

Exercice 13. Déterminer si les applications suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, -2x-y)$,

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x+2z, -x+y+z, z)$,

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z)$,

(e) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = R$, reste de la division euclidienne de P par $Q \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Exercice 14. Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q = \text{Id}_E - p$.

(a) Montrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.

(b) On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\text{Im } p = \text{Ker } q$ et que $\text{Ker } p = \text{Im } q$.

Exercice 15. Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$\text{Ker } p = \text{Ker } q \Leftrightarrow (p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q) \qquad \text{et} \qquad \text{Im } p = \text{Im } q \Leftrightarrow (p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p).$$

Exercice 16. Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$, et qu'alors $\text{Im}(p+q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Exercice 17. Soient E un espace vectoriel E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie.