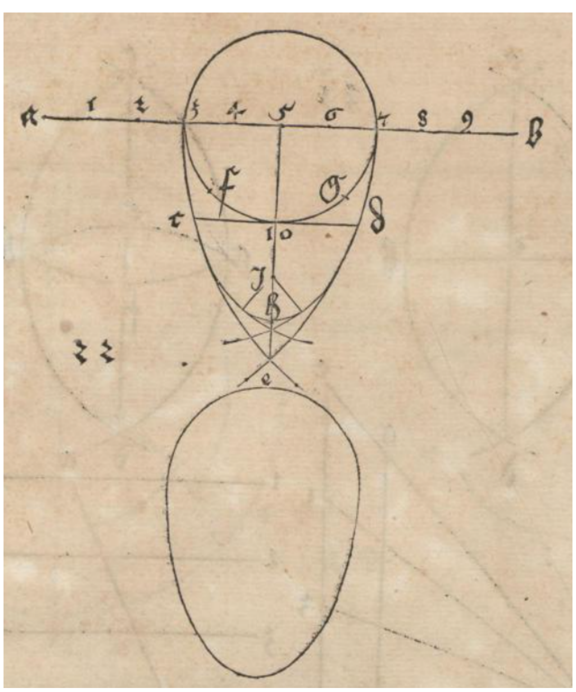
Devoir à la maison n° 10
CORRIGÉ

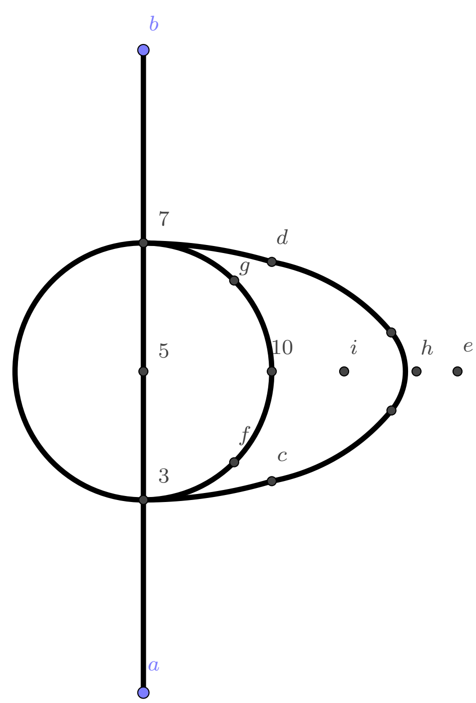
Exercice 1.

1. En $y = 0$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)(1 - f(x)f(0)) = f(x) + f(0)$, donc $f(0)(1 + f(x))^2 = 0$, donc $f(0) = 0$.
2. En dérivant par rapport à y, on a :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f'(x+y)(1 - f(x)f(y)) - f(x+y)f(x)f'(y) = f'(y),$$
puis, en $y = 0$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x)^2 f'(0) = f'(0),$$
c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)$.
3. On pose $a = f'(0)$. Par primitivation de l'égalité ci-dessus : $\exists b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(f(x)) = ax + b$.
4. Supposons $a \neq 0$, alors $ax + b \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, ce qui est absurde puisque la fonction $\arctan$ est bornée.
Donc $a = 0$, donc f est constante. Donc, comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle.
Réciproquement, la fonction nulle est bien solution, donc E est le singleton fonction nulle.

Exercice 2.

1.





Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung*, 1525.

2. La courbe $j7$ est un arc du cercle d'équation $x^2+y^2=2^2$, donc $f_1 : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$, définie sur $[-2,0]$. De même, la courbe $7d$ est un arc du cercle d'équation $x^2+(y+5)^2=7^2$, donc $f_2 : x \mapsto -5+\sqrt{49-x^2}$, définie sur $[0,2]$. En particulier, $f_2(2)=-5+\sqrt{45}=3\sqrt{5}-5$, donc le point d a pour coordonnées $(x_d, y_d)=(2, 3\sqrt{5}-5)$.
3. (a) Le point f' appartient au cercle de centre 5 et de rayon 2, donc a pour coordonnées $(x',y')=(2\sin\theta, -2\cos\theta)$. La courbe dh est alors un arc du cercle d'équation :

$$(x-x')^2+(y-y')^2=df'^2=(x_d-x')^2+(y_d-y')^2,$$

donc $f_3 : x \mapsto y'+\sqrt{df'^2-(x-x')^2}$.

(b) L'œuf est continu par construction, et f_2 et f_3 sont usuellement dérivables. D'après le théorème de la limite de la dérivée, l'œuf est alors de classe C^1 en d si et seulement si $f_2'(2)=f_3'(2)$. Or :

$$f_2' : x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{49-x^2}} \quad \text{et} \quad f_3' : x \mapsto -\frac{x-x'}{\sqrt{df'^2-(x_d-x')^2}},$$

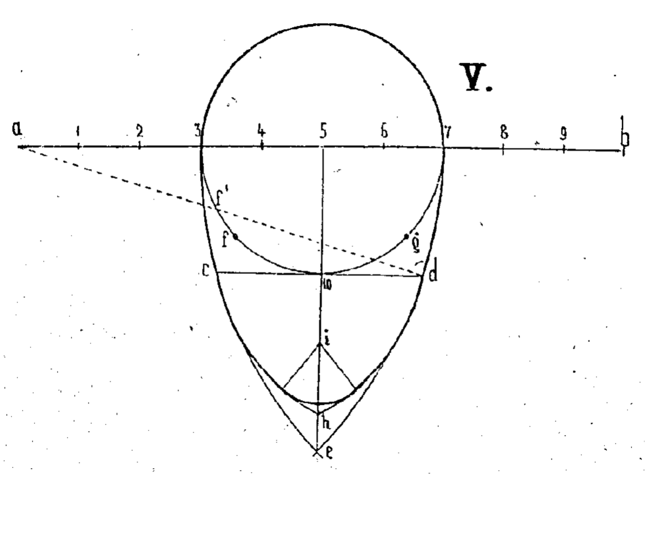
donc :

$$\begin{aligned} f_2'(2)=f_3'(2) \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3\sqrt{5}}=-\frac{2-2\sin\theta}{3\sqrt{5}-5+2\cos\theta} \\ &\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{5}(1-\sin\theta)=3\sqrt{5}-5+2\cos\theta \\ &\Leftrightarrow \quad 2\cos\theta+3\sqrt{5}\sin\theta=5. \end{aligned}$$

(c) On a : $(3\sqrt{5})^2+2^2=49=7^2$. Notons $\alpha=\arcsin\left(\frac{2}{7}\right)$, alors :

$$\begin{aligned} 2\cos\theta+3\sqrt{5}\sin\theta=5 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=\frac{5}{7} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha+\theta)=\frac{5}{7} \\ &\underset{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \quad \alpha+\theta=\arcsin\left(\frac{5}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \theta=\arcsin\left(\frac{5}{7}\right)-\arcsin\left(\frac{2}{7}\right)\simeq 28,98°. \end{aligned}$$

4.



Hermann Staigmüller, *Dürer als Mathematiker*, 1891.