**Corrigé de Révisions ( Thèmes : Théorème spectral) : Décomposition polaire**

Les six premières questions on été vues en détail et ensemble lundi dernier.
Le corrigé débute donc en Q7.

# 1 Décomposition polaire : Existence

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
1) Etablir que : ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2) Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. A l'aide du théorème spectral matriciel montrer qu'il existe une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = M$.
3) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tAA$, vérifier alors que $AS^{-1}$ est une matrice orthogonale.
4) En déduire que $A$ peut s'écrire comme le produit d'une matrice orthogonale d'ordre $n$ et d'une matrice symétrique définie positive.
..........................................................................................................
..........................................................................................................

# 2 Décomposition polaire : Unicité

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe $(O, O') \in (O(n))^2$ et $(S, S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ telles que : $A = OS = O'S'$.
On se propose de montrer que $O = O'$ et $S = S'$.
5) Justifier l'exitence de $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $H^2 = S'$.
6) En déduire que ${}^tO'O$ est semblable à $HS^{-1}H$.
7) Etablir que la matrice $HS^{-1}H$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et de valeurs propres strictement positives.
8) Quelles sont les valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale ?
9) Conclure en confrontant les informations précédentes.
10) Donner une version géométrique (i.e en termes d'automorphismes) du théorème principal de ces deux premières sections.
..........................................................................................................
..........................................................................................................

# 3 Application

11) On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et $||.||$ désigne sa norme associée.
On se donne une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
i) $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$.
ii) $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), ||AX|| \leq ||X||$.
Démontrer, en utilisant la décomposition polaire, que $A \in O(n)$. ( Résultat de Djokovik circa 1970 (d'après le très bon livre de V.Prasolov)).
..........................................................................................................
..........................................................................................................

# 4 SOLUTION

Q7. En transposant $HS^{-1}H$, on voit que celle-ci est symétrique ( réelle et inversible, car produit de telles matrices). Ainsi $HS^{-1}H$ est elle diagonalisable et de spectre inclus dans $\mathbb{R}^*$.

Nous allons montrer que $V = HS^{-1}H \in S_n^+(\mathbb{R})$ i.e que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), VX.X = {}^tXVX \geq 0$.
En effet ${}^tXVX = {}^tHX.S^{-1}(HX) \geq 0$ puisque $S^{-1}$ est symétrique et définie positive ( les valeurs propres de $S^{-1}$ étant les inverses de celles de $S$)$\blacksquare$
Q8. D'après votre cours le spectre réel d'une matrice orthogonale est inclus dans $\{-1, 1\}$$\blacksquare$
Q9. ${}^tO'O$ est semblable à $HS^{-1}H$ donc ${}^tO'O$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais elle aussi orthogonale ( inverse et produit de matrices orthogonales le sont aussi), par ailleurs son spectre ( qui est non vide puisque dz) ne comporte que des valeurs positives. On déduit de tout ceci que ${}^tO'O$ est semblable à $I_n$ donc égale à $I_n$; ce qui donne $O = O'$ puis $OS = OS'$ et, par multiplication à gauche par ${}^tO$, $S = S'$$\blacksquare$
Q10. Plaçons nous dans un espace euclidien $E$ ( de dimension $n$) dont $b$ est une b.on.
Considérons $f \in GL(E)$.
Sachant que un endomorphisme de $E$ est une isométrie vectorielle de $E$ (resp. un automorphisme auto-adjoint de $E$, défini positif) ssi sa matrice dans $b$ appartient à $O(n)$ (resp. à $S_n^{++}(\mathbb{R})$), ce qui précède permet d'énoncer qu'il existe un unique couple $(\omega, s) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = \omega o s$$\blacksquare$