Révisions (Probablités) : CCINP PC 2023 , une jeu de société

Q.39
Que peut-on dire des évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.
Solution Ces événements sont égaux. En effet si $T > n$ alors $S_n < A$ et inversement.
Dès lors $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(S_n \leq A-1)$ et, en vertu de Q38, nous obtenons pour cette probabilité $\dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+A-1}{n}$, au moins pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$, cette formule reste vraie.
Par conséquent $E(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+A-1}{n}\frac{1}{M^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+A-1}{A-1}\frac{1}{M^n}$, ce par propriété des coefficients binomiaux.
Donc $E(T) = M^{A-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+A-1}{A-1}\frac{1}{M^{n+A-1}}$ puis en posant $m = n + A - 1$ et avec Q30 :
$E(T) = \dfrac{M^A}{(M-1)^A}$.