Prénom : **Nom :** **Série générale**

▶ Exercice 1 /2

Résoudre l'inéquation $\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

bonus : Résoudre l'équation $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

▶ Exercice 2 /8

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$ et que α est comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln x$. Interpréter le résultat obtenu.

▶ Exercice 3 /4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donner la réponse sans justifications sur la copie.

1. La somme $S = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$ est égale à :

   a. $\frac{1}{2}\ln(2)$ **c.** $-\frac{3}{2}\ln(2)$ **b.** $-\frac{1}{2}\ln(2)$ **d.** $\frac{3}{2}\ln(2)$

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=5x+\mathrm{e}^{-x}-\ln(x)$.

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ **b.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$ **c.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ **d.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$

3. Soient a et b deux nombres réels distincts et strictement positifs.
Quelle est l'unique solution de l'équation d'inconnue x suivante : $a\mathrm{e}^{bx}=b\mathrm{e}^{ax}$?

a. $\dfrac{a}{b}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ **b.** $\dfrac{a}{b}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$ **d.** $\dfrac{\ln(a)-\ln(b)}{b-a}$

4. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 coupe l'axe $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath})$ au point d'abscisse :

a. 0 **b.** $\ln(2)$ **c.** $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

▶ Exercice 4 /6

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\quad \text{et}\quad g(x)=\mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.

1. Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$. En déduire les asymptotes éventuelles
2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout réel x, $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
$$h'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]$$
(b) Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\leqslant 0$.
(c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

▶ Exercice 5 /5

1. On donne la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1\\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}\end{cases}$.
Compléter la fonction `terme` ci-dessous pour afficher la valeur du terme de rang n de la suite (u_n).

```
def terme(n):
    u=...
    for i in range(...) :
        u = ...
    return ...
```

2. On donne la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 1\\ v_{n+1} = 0,8\times v_n+5\end{cases}$.
Compléter le programme ci-dessous pour afficher le rang de la première valeur de la suite (v_n) dépassant (ou égalant) 20.

```
v=...
n=...
while .........:
    v = ...
    n = ...
print(...)
```