Le 29/02/2024	DS n° 6	CPES
Prénom :	**Nom :**	**Série technologique**

Calculatrices autorisées

▶ Exercice 1 /2 — (10 minutes)

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

▶ Exercice 2 /6,5 — (30 minutes)

1. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} + 3 = 0$.
On pourra poser le changement de variable $X = \mathrm{e}^{x}$.

2. On considère l'inéquation $\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de cette inéquation.

(b) Résoudre l'inéquation sur son ensemble de définition.

3. On considère l'équation suivante :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln x$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de cette équation.

(b) Résoudre l'équation sur son ensemble de définition.

▶ Exercice 3 /7,5 — (40 minutes)

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$.

(a) Démontrer que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$.

(b) Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$.

(c) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

(d) Déterminer les limites de $g(x)$ en 0 et $+\infty$.

(e) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;+\infty[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

(f) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \left(\ln(x)\right)^2$.

(a) Démontrer que pour tout réel $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$$

(b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

(c) En déduire que f admet un minimum en $x = \alpha$.

▶ Exercice 4 /5 — (20 minutes)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^{x}}$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ puis quand x tend vers $+\infty$.

2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-1-x}{\mathrm{e}^{x}}$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

   (c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

   (a) Justifier que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est horizontale.

   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   On rappelle que la tangente à une courbe au point d'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

▶ Exercice 5 /5

1. On donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n} \end{cases}.$$
Compléter la fonction `terme` ci-dessous pour afficher la valeur du terme de rang n de la suite (u_n).

```
def terme(n):
    u=...
    for i in range(...) :
        u = ...
    return ...
```

2. On donne la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n + 5 \end{cases}.$$
Compléter le programme ci-dessous pour afficher le rang de la première valeur de la suite (v_n) dépassant (ou égalant) 20.

```
v=...
n=...
while .........:
    v = ...
    n = ...
print(...)
```