Correction DS 6 . ST.

Exercice 1

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$g(x) = (x+1)e^{-x}$ $\quad$ $g'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1)\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$

Exercice 2

1°) $e^{2x} + 2e^{x} + 3 = 0$ si $X = e^{x}$ alors $X^2 + 2X + 3 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta < 0$

donc $S = \emptyset$

2°) $\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

a) $\begin{cases} 3x+1>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x < 3 \end{cases}$ donc $\mathcal{D} =]-\frac{1}{3} ; 3[$

b) $\forall x \in \mathcal{D}$, $\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

$\Leftrightarrow \quad 3x+1 \geqslant 3-x$

$\Leftrightarrow \quad 4x \geqslant 2$

$\Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad$ Ainsi $S = [\frac{1}{2} ; 3[$

3°) $\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x)$

a) $\begin{cases} 6x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$ donc $\mathcal{D} =]\frac{1}{2} ; +\infty[$

b) $\forall x \in \mathcal{D}$, $\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow \quad \ln((6x-2)(2x-1)) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow \quad 12x^2 - 10x + 2 = x$

$\Leftrightarrow \quad 12x^2 - 11x + 2 = 0$

$\Delta = 121 - 4 \times 2 \times 12 = 25$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{11-5}{24}$ ou $x = \frac{11+5}{24}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ ou $x = \frac{2}{3}$ $\quad$ avec $\frac{1}{4} \notin \mathcal{D}$

Ainsi $S = \{\frac{2}{3}\}$

Exercice 3

1°) Soit $g : x \mapsto x^2 + \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$

1a) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

1b) $g'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$

1c) donc

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$\nearrow$

1d) $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $\quad$ par opérations sur les limites

1e) Sur $]0;+\infty[$, • g est continue car dérivable
• g est strictement croissante
• $0 \in]\lim_{x\to 0} g(x) ; \lim_{x\to+\infty} g(x)[$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. A la calculatrice on obtient le tableau suivant

x	f(x)
0.62	-0.09363580094
0.63	-0.0651354596
0.64	-0.03668710263
0.65	-0.008282916092
0.66	0.02008455604
0.67	0.0484224334

Donc $\alpha \in]0,65;0,66[$

1 f) On en déduit le signe de g sur $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2°) $f : x \mapsto x^2 + (\ln(x))^2$

2a) $\forall x \in]0;+\infty[$ $\quad f'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2x^2}{x} + \frac{2\ln(x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+\ln(x))}{x} = \frac{2\,g(x)}{x}$$

2b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ car $\frac{2}{x}$ est positif sur $]0;+\infty[$

2c) Ainsi, par lecture du tableau de variations, $f(\alpha)$ est le minimum de f sur $]0;+\infty[$

Exercice 4 $\qquad f(x) = \frac{x+2}{e^x}$

1°) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ par opérations sur les limites

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$ mais $f(x) = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{e^x \times 1}$

et d'après les théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2a) $\boxed{f'(x)} = \dfrac{e^x \times 1 - (x+2)\,e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{\cancel{e^x}\,(1-(x-2))}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \boxed{\dfrac{-x-1}{e^x}}$

2b) $e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

$f(-1) = \dfrac{-1+2}{e^{-1}} = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$

3) a) la tangente en -1 est horizontale car la dérivée s'annule. $\boxed{y=e}$

b) en 0 : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{-1}{1} \times x + 2$

$\Leftrightarrow T_0 : \boxed{y = 2-x}$

Algorithmes :

1. On donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n} \end{cases}$.
Compléter la fonction terme ci-dessous pour afficher la valeur du terme de rang n de la suite (u_n).

```
def terme(n):
    u=1
    for i in range(n) :
        u = u/(2+u)
    return u
```

2. On donne la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n + 5 \end{cases}$.
Compléter le programme ci-dessous pour afficher le rang de la première valeur de la suite (v_n) dépassant (ou égalant) 20.

```
v=1
n=0
while v<20:
    v = 0,8*v+5
    n = n+1
print(...)
```