Prénom : **Nom :** **Série générale**

▶ Exercice 1 /2

Résoudre l'inéquation $\ln(2x-3) \geqslant \ln(4-x)$

▶ Exercice 2 /6

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Étude de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

(a) Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

(b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. (a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

(b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

(c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ sachant que $(\mathscr{C})$ admet en A une tangente T parallèle à Δ.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur $]0;+\infty[$. Prouver que $\frac{1}{2} \leqslant x_0 \leqslant 1$.

▶ Exercice 3 /4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donner la réponse sans justifications sur la copie.

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5x + \mathrm{e}^{-x} - \ln(x)$.

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$ **c.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ **d.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

2. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 coupe l'axe (O ; $\vec{\imath}$) au point d'abscisse :

a. 0 **b.** $\ln(2)$ **c.** $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ **d.** $\frac{1}{2}$

3. Soient a et b deux nombres réels distincts et strictement positifs.

Quelle est l'unique solution de l'équation d'inconnue x suivante : $a\mathrm{e}^{bx} = b\mathrm{e}^{ax}$?

a. $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **b.** $\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$ **c.** $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ **d.** $\frac{\ln(a)-\ln(b)}{b-a}$

4. La somme $S = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$ est égale à :

a. $-\frac{1}{2}\ln(2)$ **b.** $-\frac{3}{2}\ln(2)$ **c.** $\frac{1}{2}\ln(2)$ **d.** $\frac{3}{2}\ln(2)$

▶ Exercice 4 /8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \cos x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x,

$$-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x.$$

En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?

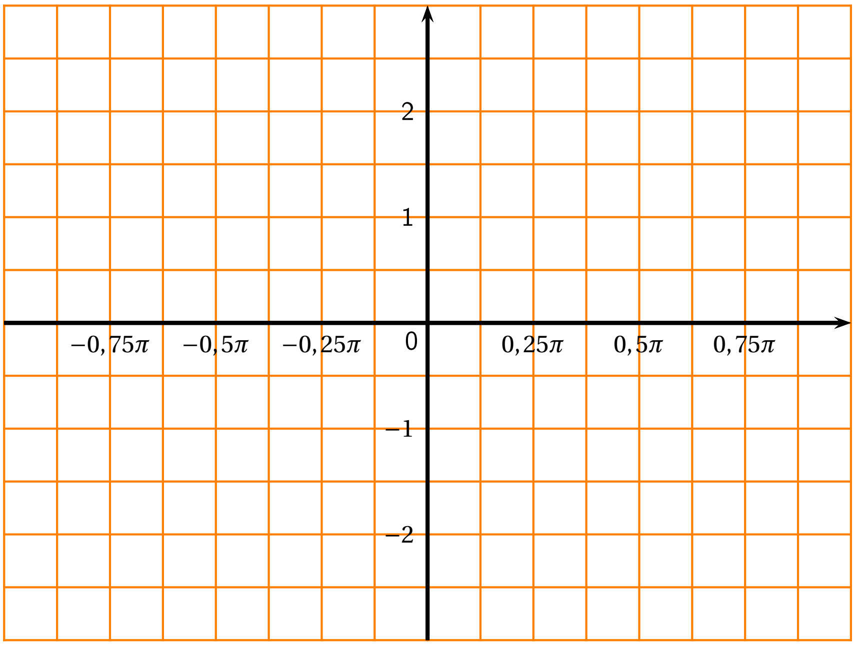
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$.

   Démontrer que pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$ on a :
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$
4. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   Montrer que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[+\frac{\pi}{4}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$.

   Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$.

   Indiquer les valeurs prises par f en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous



6. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α.

   Trouver, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée décimale de α arrondie au centième.
7. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin x$.

   En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.

   Trouver l'équation de la tangente T $\mathscr{C}_f$ en 0 et tracer T sur le graphique de la question 5.

▶ Exercice 5 /5

1. On donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n} \end{cases}$.

Compléter la fonction `terme` ci-dessous pour afficher la valeur du terme de rang n de la suite (u_n).

```
def terme(n):
    u=...
    for i in range(...) :
        u = ...
    return ...
```

2. On donne la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n + 5 \end{cases}$.

Compléter le programme ci-dessous pour afficher le rang de la première valeur de la suite (v_n) dépassant (ou égalant) 20.

```
v=...
n=...
while .........:
    v = ...
    n = ...
print(...)
```