Le 06/03/2024 | DS n° 6 | CPES

Prénom : | Nom : | Série technologique

Calculatrices autorisées

▶ Exercice 1 /2 — (10 minutes)

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = \frac{\ln(3x)}{x} \qquad g(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

▶ Exercice 2 /6,5 — (30 minutes)

1. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 4 = 0$.
   On pourra poser le changement de variable $X = \mathrm{e}^{x}$.
2. On considère l'inéquation $\ln(2x-3) \geqslant \ln(4-x)$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de cette inéquation.
   (b) Résoudre l'inéquation sur son ensemble de définition.
3. On considère l'équation suivante :
   $$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln x$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de cette équation.
   (b) Résoudre l'équation sur son ensemble de définition.

▶ Exercice 3 /7,5 — (40 minutes)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$.

1. Étude de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par
   $$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$
   (a) Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. (a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   (c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ sachant que $(\mathscr{C})$ admet en A une tangente T parallèle à Δ.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur $]0\,;+\infty[$. Prouver que $\frac{1}{2} \leqslant x_0 \leqslant 1$.

▶ Exercice 4 /5 — (20 minutes)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{\mathrm{e}^x}$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ puis quand x tend vers $+\infty$.
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1-2x}{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

   (c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

   (a) Justifier que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est horizontale.

   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   On rappelle que la tangente à une courbe au point d'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

▶ Exercice 5 /5

1. On donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n} \end{cases}$.
Compléter la fonction `terme` ci-dessous pour afficher la valeur du terme de rang n de la suite (u_n).

```
def terme(n):
    u=...
    for i in range(...) :
        u = ...
    return ...
```

2. On donne la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n + 6 \end{cases}$.
Compléter le programme ci-dessous pour afficher le rang de la première valeur de la suite (v_n) dépassant (ou égalant) 50.

```
v=...
n=...
while .........:
    v = ...
    n = ...
print(...)
```