Feuille d'exercices 17
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1 - FORMULES DE TAYLOR

Exercice 1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $f(t) = \sqrt{t}$ entre $a = 100$ et $b = 101$. En déduire une approximation décimale de $\sqrt{101}$ à 10^{-6} près.

Exercice 2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $\cos$ sur $[0, x]$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^6}{6!}$, puis une approximation rationnelle de $\cos(0,1)$ à 10^{-8} près.

Exercice 3. Montrer que $\forall x > 0$, $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 < \sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3$.
En déduire une valeur approchée de $\sqrt[3]{1,03}$ à 10^{-5} près.

Exercice 4. Montrer que : $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} < \ln(1+x) < \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 5. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Soit $x_0 \in I$. Montrer que : $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

2 - OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 6. Donner les DL_2, DL_4, DL_{10} et DL_{2022} en 0 de $f(x) = x^{58} + 2x^{12} + 5x^{10} + x^3$.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Jusqu'à quel ordre la fonction x^α admet-elle un développement limité en 0 ?

Exercice 8. En posant $y = x - 2$, déterminer les DL_4 en 2 des fonctions e^x, $\sqrt{1+x}$ et $\ln(1+x)$.

Exercice 9. Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL_3 en 0 de $\frac{1}{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$,
(b) DL_7 en 0 de $\mathrm{ch}(x)$,
(c) DL_8 en 0 de $\mathrm{sh}(x)$,
(d) DL_3 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$,
(e) DL_6 en 0 de $(1 - \mathrm{ch}(x))\sin(x)$,
(f) DL_8 en 0 de $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$,
(g) DL_5 en $\frac{\pi}{3}$ de $\cos x$.

Exercice 10.
(a) Rappeler l'expression de la dérivée de $\arctan$.
(b) En déduire un DL en 0 à tout ordre de $\arctan$.
(c) Déterminer de même un DL en 0 à tout ordre de $\arcsin$.

Exercice 11. La fonction $\frac{1}{1+|x|^3}$ admet-elle un DL_2 en 0 ? un DL_3 en 0 ? un DL_4 en 0 ?

Exercice 12. Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL_3 en 0 de $\dfrac{1+x}{2+x}$,
(b) DL_3 en 0 de $\mathrm{th}(x)$,
(c) DL_5 en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan(x)$,
(d) DL_4 en 0 de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$,
(e) DL_5 en 0 de $\cos^3 x$,
(f) DL_4 en 0 de $\sqrt[3]{1+\cos x}$,
(g) DL_4 en 0 de $\ln(1+\sin x)$,
(h) DL_2 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$,
(i) DL_4 en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$,
(j) DL_4 en 0 de $\sin(x-x^2)$,
(k) DL_5 en 0 de $\arctan(x)$,
(l) DL_5 en 0 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$,
(m) DL_5 en 0 de $\arccos(x)$.

3 - Utilisations des développements limités

Exercice 13. Déterminer les dérivées $n^{\text{èmes}}$ en 0 de la fonction $\arcsin$.

Exercice 14. Déterminer la limite en 0 de

(a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$,
(b) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$,
(c) $\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}}$,
(d) $\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{cotan}^2 x$,
(e) $\dfrac{e^x}{\mathrm{sh}x}-\dfrac{e^{-x}}{\sin x}$,
(f) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{1-\cos 2x}$,
(g) $\dfrac{\tan x-\arcsin x}{\sin x-\arctan x}$,
(h) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$.

Exercice 15. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$.

Exercice 16. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en x_0 des fonctions suivantes. Y a-t-il un extremum local en x_0 ?

(a) $\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{4}$ en $x_0=0$,
(b) $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0=0$,
(c) $\dfrac{3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)}{3x}$ en $x_0=0$,
(d) $x+2\sqrt{x}-\sqrt{3+x}$ en $x_0=1$,
(e) $\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ en $x_0=1$,
(f) x^α en $x_0>0$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 17. Tracer les graphes des fonctions $1+\sin x$, e^x, $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, et leurs tangentes en 0.

Exercice 18. Déterminer les développements asymptotiques suivants :

(a) $x^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\sqrt{x}}$ en 0,
(b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ en $+\infty$,
(c) $\dfrac{1}{x+\ln x}$ en $+\infty$.

Exercice 19. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote de

(a) $\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$,
(b) $(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$,
(c) $\ln(e^{x^2}-e^x-1)$.

Exercice 20. Soit $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x+\ln x$.
(a) Montrer que $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ est une bijection continue croissante.
(b) Montrer que $f^{-1}(y)\underset{y\to+\infty}{\sim} y$.
(c) Montrer que $f^{-1}(y)=y-\ln y+\dfrac{\ln y}{y}+\underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)$.